41

Fotograferar svartvitt randmönster på avstånd $\ell = -2\,m$ med kameraobjektiv, $f = 50\,mm$.
Resultat enl. tabell. Skissa MTF-kurva.

bredd på randpar i objekt	2cm	1cm	0.5cm	0.25cm	0.1cm
kontrast i bild	90%	70%	30%	15%	0%

Lösning: På x-axeln ska det vara linjepar/mm.
På y-axeln är kontrasten som är andra radien i tabellen om kontrast i objekt är 100%.

Alltså måste bredden på randpar i bilden räknas ut och sen ta ett över resultat för att få värden på x-axeln dvs. $\dfrac{1}{\text{bredd på randpar i bild}}$.

Bredden av randpar i bild fås genom att räkna ut förstoringen m och sen multiplicera det med bredd i objekt. Förstoringen räknas ut med $m = \dfrac{\ell'}{\ell} = \dfrac{L}{L'}$.

Avbildningsformeln: $L' = F + L$

där $L = \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{-2m} = -0.5D$, $F = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{0.05m} = 20.0D$

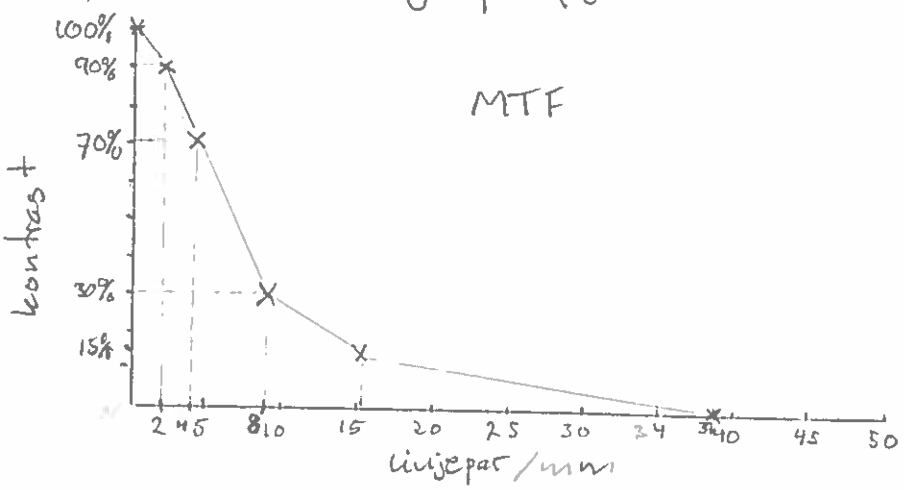
$\Rightarrow L' = -0.5 + 20 = 19.5D$

$\Rightarrow m = \dfrac{L}{L'} = \dfrac{-0.5}{19.5} = 0.0256.$

Gör ny tabell:

bredd randpar i bild	0.51mm	0.256mm	0.13mm	0.064mm	0.0256mm
linjepar/mm i bild	1.95/mm	3.9/mm	7.8/mm	15.6/mm	39/mm
kontrast	90%	70%	30%	15%	0%

Plotta detta i graf (y-axel: kontrast, x-axel: linjepar/mm)



= Svar

42

MTF-kurvor för två optiska system:

a) Vilka storheter plottas på axlarna?

Svar: På x-axeln ges linjetätheten (spatialfrek.) i bildplanet (dvs i bilden).
Den brukar ges i linjer/mm.

På y-axeln visas MTF (Modulation Transfer Function) som ger ett värde mellan noll och ett (0-100%) som anger hur bra kontrasten hos objektet överförs till bilden.

b) Vilket system har bäst upplösning?

Svar: MTF-I skär x-axeln ungefär vid
$s'_{max} = 170$ linjer/mm
MTF-II skär x-axeln ungefär vid
$s'_{max} = 260$ linjer/mm.
Alltså har system II bäst upplösning.

c) Med hjälp av kurvorna uppskatta kontrasten för svart-vitt linjemönster med $s' = 100$ linjer/mm

Svar: Om kontrasten hos objektet antas vara 1 så ges kontrasten i bilden direkt av MTF-värde på y-axeln för motsvarand spatialfrekvens $s' = 100$ linjer/mm på x-axeln.

$MTF_I(100 \text{ linjer/mm}) = 0.3$

$MTF_{II}(100 \text{ linjer/mm}) = 0.55$

43 || Vit-svartrandig skjort, randbredd 4mm avbildas med kamera. Objektivets fokallängd $f = 22mm$. Vid vilket avstånd ser skjortan grå ut?

Lösning: Ur MTF-kurvan ser man att vid spatialfrekvensen $s' = 60$ linjer/mm i bilden så är kontrasten noll.

Låt m vara förstoringen. Då blir bredden av ett randpar i bilden $m \cdot 4mm$ och spatialfrekvensen i bilden blir

$$s' = \frac{1}{m \cdot 4mm} \qquad (*)$$

Förstoringen räknas ut som vanligt $m = \frac{L}{L'}$ men avbildningsformeln ger $L' = L + F$. Byt ut L' i formeln för m mot $L + F$ ger att

$$m = \frac{L}{L+F} \quad , \quad \text{där } F = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.022m} = 45.5\,D$$

och $L = \frac{1}{\ell}$ där ℓ är objektavståndet som ju söks!

Stoppa in detta nya uttryck i formeln för s' (*) ger att

$$s' = \frac{1}{\left(\frac{L}{L+F}\right) \cdot 4mm} = \frac{L+F}{L \cdot 4mm} \Leftrightarrow$$

$$4mm \cdot L \cdot s' = L + F \Leftrightarrow (4m \cdot s' - 1)L = F \Leftrightarrow$$

$$\ell = \frac{1}{L} = \frac{4mm \cdot s' - 1}{F} = \frac{4mm \cdot 60 \text{ linjer/m} - 1}{45.5D} = \frac{239}{45.5D} = \underline{\underline{5.3m}}$$

Svar: När skjortan är $\underline{\underline{5.3m}}$ bort ser den jämngrå ut.

44 Gränsfrekvens för kameraobjektif med $f = 100mm$ är 200linjer/mm för avlägsna objekt. Kan två punktkällor 0.1m från varandra särskiljas på 1000m avstånd.

Lösning: Objektavståndet är $l = -1000m$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{l} = \frac{1}{-1000m} = -0.001D$$

Objektivets styrka $F = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.1m} = 10\,D$

Avbildningsformeln:

$$L' = F + L = 10 - 0.001 = 9.999D$$

Detta ger förstoringen $m = \frac{L}{L'} = \frac{0.001}{9.999} = 0.0001$

Avståndet mellan punkterna i bilden är förstoringen gånger avståndet i objektet dvs

"avstånd mellan punkter i bild" $= 0.0001 \cdot 0.1m = 0.00001m =$

$= 0.01mm$

Frekvensen blir 1 delat med 0.01 $\Rightarrow$

$$\frac{1}{0.01mm} = 100 \text{ linjer/mm}$$

vilket är ju lägre än gränsfrekvensen 200linjer/mm

Så punkterna bör kunna särskiljas.

Svar: Punkterna kan särskiljas då de motsvarar frekvensen 100linjer/mm!

45 ||

Två MTF-kurvor för normalöga 1: pupill 2 mm och 2: pupill 4 mm.

Ögat tittar på svartvitt randmönster på objektavstånd $l = -50\,m$. Det är 7 svarta linjer per meter i objekt.

Hur ändras kontrasten om pupillen går från 4 mm till 2 mm?

Lösning: Spatialfrekvensen i bilden ges av

$$s' = \frac{s}{m}$$

där $s = 7\ \text{linjer}/m = 0.007\ \text{linjer}/mm$ är spatialfrekvensen i objektet och m är förstoringen.

$$m = \frac{L}{L'} \quad \text{där } L = \frac{1}{l} = \frac{1}{-50\,m} = -0.02\,D$$

antag ögats styrka $F = 60\,D \Longrightarrow$

$$L' = L + F = -0.02 + 60 = 59.98\,D$$

så att förstoringen blir

$$m = \frac{0.02}{59.98} = 3.33 \times 10^{-4}$$

detta ger spatialfrekvensen i bilden

$$s' = \frac{s}{m} = \frac{0.007\ \text{linjer}/mm}{3.33 \times 10^{-4}} = 21\ \text{linjer}/mm$$

MTF-kurvan för 4mm pupill ger kontrasten

$$MTF(21\ \text{linjer}/mm) \approx 0.4 \quad (4mm\ \text{pupill})$$

MTF-kurvan för 2mm pupill ger kontrasten

$$MTF(21\ \text{linjer}/mm) \approx 0.85 \quad (2mm\ \text{pupill})$$

Svar: kontrasten ändras från 0.4 till 0.85 när pupillen går från 4mm till 2mm.

46) Hur ser bilden av de två mönstrena (visas i uppgiften i häftet) ut om de fotograferas på $\ell = -200$m och kameraobjektiv har $f = 100$mm (och MTF-kurvan visas på bild i häften)?

Lösning: Mittenfiguren har 3st randpar på 100mm och högra figuren har 6st randpar på 100mm. Detta ger spatiella frekvensen hos objekten som

$$S_1 = \frac{3 \text{ linjer}}{100\text{mm}} = 0.03 \text{ linjer/mm} \quad \text{(mittenfig}$$

$$S_2 = \frac{6 \text{ linjer}}{100\text{mm}} = 0.06 \text{ linjer/mm} \quad \text{(högra figu}$$

Spatialfrekvensen i bilden ges av $s' = \frac{s}{m}$ där $m = \frac{\ell'}{\ell}$ är förstoringen. Efter som objektavståndet är <u>mycket</u> längre än fokallängden blir $\ell' \approx f' \Longrightarrow$

$$m = \frac{f}{\ell} = \frac{0.1\text{m}}{200\text{m}} = 0.0005$$

Motsvarande spatialfrekvens i bilden för varje objekt blir då:

$$s_1' = \frac{s_1}{m} = \frac{0.03 \text{ linjer/mm}}{0.0005} = 60 \text{ linjer/mm}$$

$$s_2' = \frac{s_2}{m} = \frac{0.06 \text{ linjer/mm}}{0.0005} = 120 \text{ linjer/mm}$$

Motsvarande MTF värde fås ur MTF-kurvan:

$$MTF(s_1') = 0.3, \quad MTF(s_2') = 0$$

Detta blir också höjden på kontrasten i bilden:

Svar:

Bild av mönster 1

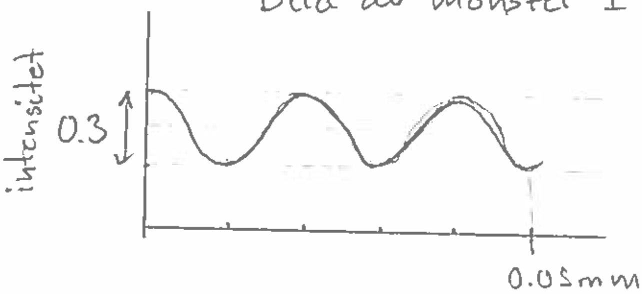
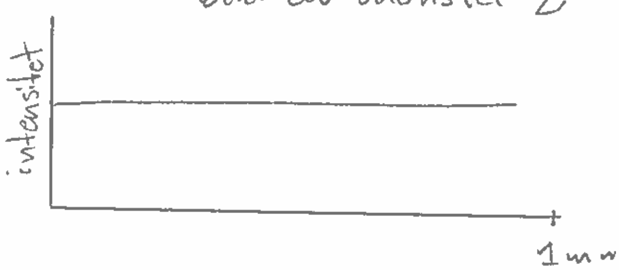


bild av mönster 2



47

Figur visar punktspridningsfunktion (psf) för optiskt system förstorad 500ggr. Skissa MTF-kurva och uppskatta gränsfrekvens s...

Lösning: Bilden visar en psf som motsvarar en airy disk för ett diffraktionsbegränsat system.

För ett diffraktionsbegränsat system går MTF-kurvan ne... som en rak linje och böjer av lite vid gränsfrekv... s'_{max}.

Upplösningen ges av Rayleight-kriteriet som säger att två linjer kan upplösas om avståndet mellan dem inte är mindre är r (radien på airydisken).

Mätning i figur ger $r = \frac{3.5mm}{500} = 0.007 mm$

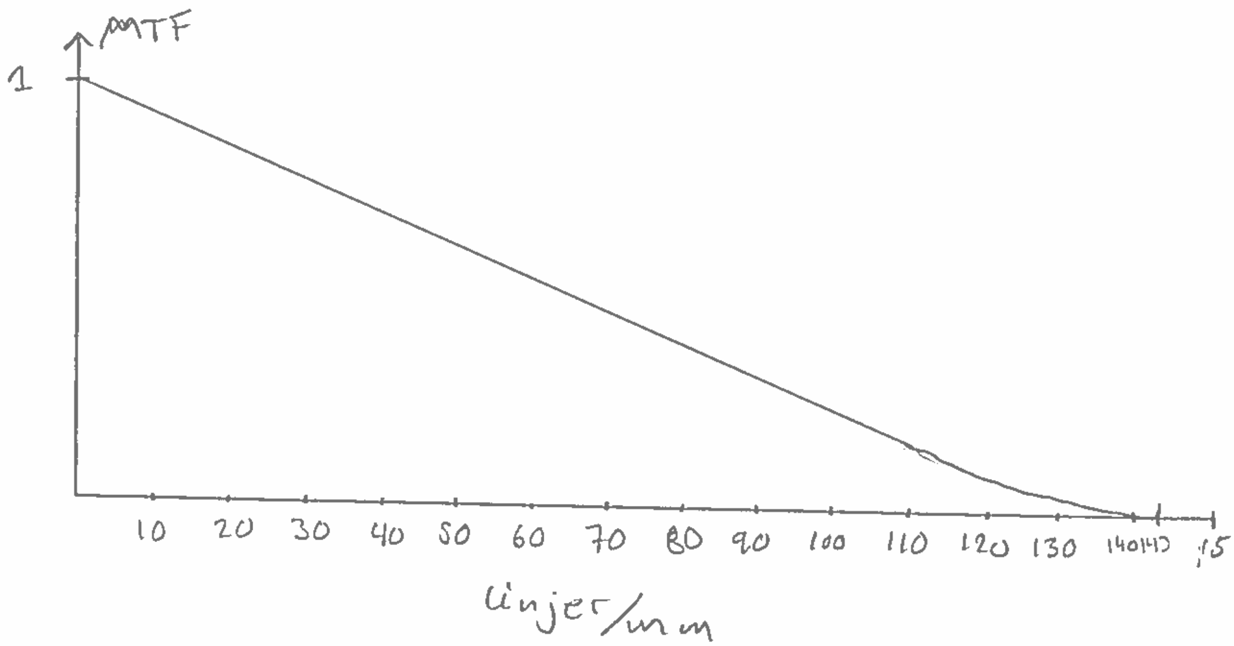
förstoringen av bild i övningshäftet

Detta ger gränsfrekvensen som

$$s'_{max} = \frac{1}{r} = \frac{1}{0.007 mm} = 143 \text{ linjer/mm}$$

Alltså blir MTF-kurvan ungefär så här

Svar:



48

4 st linser: A) rättvänd planokonvex, f=100mm, D=4c[m]
B) —— " ——, f=150mm, D=4c[m]
C) rättvänd akromat, f=100mm, D=4c[m]
D) —— " ——, f=150mm, D=4[cm]

Para ihop rätt lins med rätt MTF-kurva.

Lösning: Akromater har nästan ingen sfärisk aberration och därför bör MTF-kurvan för C & D ligga nära den "räta" linje som visar diffraktionsbegränsade MTF-kurvor.

Detta innebär att C & D tillhör någon av kurvorna II & III. Och därmed tillhör A & B någon av kurvorna I & IV.

Stort bländartal → stor diffraktion

$f_{C\#} = \frac{0.1\,m}{0.04\,m} = 2.5 \qquad f_{D\#} = \frac{0.15\,m}{0.04\,m} = 3.75$

Alltså är lins D mer begränsad av diffraktion och vidare är gränsfrekvensen för kurva II: $s'_{II} \approx 500$ linjer/mm och kurva III $s'_{III} \approx 250$ linjer/mm.

Dvs kurva III har sämre upplösning →
lins D tillhör kurva III & lins C tillhör kurva II

Litet bländartal → större sfärisk aberration

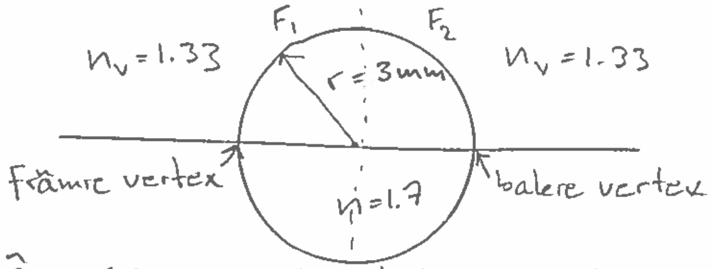
$f_{A\#} = \frac{0.1\,m}{0.04\,m} = 2.5$, $f_{B\#} = \frac{0.15\,m}{0.04\,m} = 3.75$ →

A har mest sfärisk abaration som också syns i kurva IV
Alltså tillhör lins A kurva IV och lins B kurva I

Svar: A ↔ IV   C ↔ II
B ↔ I   D ↔ III

49 Kula med radie $r = 3.0\,mm$ och $n = 1.7$ vatten på båda sidor ($n_v = 1.33$). Bestäm samtliga kardinalpunkters lägen.

Lösning



Eftersom det är samma brytnings index på båda sidor av kulan sammanfaller nodalpunkterna med huvudplanen.

Kulans främre styrka: $F_1 = \frac{n - n_v}{r} = \frac{1.7 - 1.33}{0.003m} = 122.2D$

Kulans bakre styrka: $F_2 = \frac{n_v - n}{-r} = \frac{1.33 - 1.7}{-0.003m} = 122.2\,D$

Effektiv styrka: $F_E = F_1 + F_2 - \frac{d}{n} F_1 \cdot F_2$ där $d = 6mm$ är kulans diameter $\Longrightarrow$

$$F_E = 122.2 + 122.2 - \frac{0.006m}{1.7} 122.2 \cdot 122.2 = 191.7D$$

Bakre snittstyrka $F_v' = \frac{F_E}{1 - \frac{d}{n} F_2} = \frac{191.7D}{1 - \frac{0.006m}{1.7} 122.2D} = 337.1D$

Detta ger bakre snittvidd $f_v' = \frac{n_v}{F_E} = \frac{1.33}{337.1D} = 0.0039m$

dvs $\underline{f_v' = 3.9mm}$

Bakre effektiv fokallängd är $f_E' = \frac{n_v}{F_E} = \frac{1.33}{191.7} = 0.0069m$

dvs. $\underline{f_E' = 6.9mm}$

Bakre huvudplanets läge (mätt från bakre vertex)

$$e' = f_v' - f_E' = 3.9mm - 6.9mm = -3mm.$$

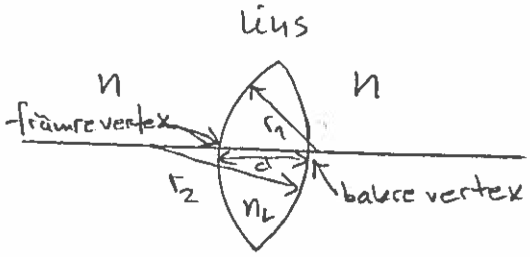
Pga symmetri blir främre kardinalpunkterna de samma som bakre men med ett minustecken

$f_E = -f_E' = -6.9mm$ och $e = -e' = 3mm$

Svar: Främre & bakre huvudplan mitt i kulan
$f_v' = -f_v = \underline{3.9mm}$ (där hamnar även nodalpunkterna

50 Beräkna linsens styrka i Emsleys ögonmodell. Bestäm också huvudplan.

Lösning: Emsley's ögonmodell:



$n_L = 1.416$ $r_1 = 10.00$ mm

$n = 1.333$ $r_2 = -6.00$ mm

$d = 3.60$ mm.

Främre styrka: $F_1 = \dfrac{n_L - n}{r_1} = \dfrac{1.416 - 1.333}{0.0100\,\text{m}} = 8.30\,\text{D}$

Bakre styrka: $F_2 = \dfrac{n - n_L}{r_2} = \dfrac{1.333 - 1.416}{-0.006\,\text{m}} = 13.833\,\text{D}$

* Effektiv styrka:

$$F_E = F_1 + F_2 - \frac{d}{n_L} F_1 \cdot F_2 = 8.30 + 13.833 - \frac{0.0036\,\text{m}}{1.416} \cdot 8.30 \cdot 13.833 =$$

$$= \underline{\underline{21.8\,\text{D}}}$$

Bakre snittstyrka: $F_v' = \dfrac{F_E}{1 - \frac{d}{n} F_1} = \dfrac{21.8\,\text{D}}{1 - \frac{0.0036}{1.416} 8.3} = 22.27\,\text{D}$

Bakre snittvidd: $f_v' = \dfrac{n}{F_v'} = \dfrac{1.333}{22.27\,\text{D}} = 0.05986\,\text{m} = 59.86\,\text{mm}$

Bakre fokallängd: $f_E' = \dfrac{n}{F_E} = \dfrac{1.333}{21.8\,\text{D}} = 0.06115 = 61.15\,\text{mm}$

* Bakre huvudplan: $e' = f_v' - f_E' = 59.86\,\text{mm} - 61.15\,\text{mm} = \underline{\underline{-1.3\,\text{mm}}}$

Främre snittstyrka: $F_v = \dfrac{F_E}{1 - \frac{d}{n} F_2} = \dfrac{21.8\,\text{D}}{1 - \frac{0.0036}{1.416} 13{,}833} = 22.59\,\text{D}$

Främre snittvidd: $f_v = \dfrac{-n}{F_v} = \dfrac{-1.333}{22.59} = -0.05900\,\text{mm} = -59.00\,\text{mm}$

Främre fokallängd: $f_E = \dfrac{-n}{F_E} = \dfrac{-1.333}{21.8\,\text{D}} = -0.06115\,\text{m} = -61.15\,\text{mm}$

* Främre huvudplan: $e = f_v - f_E = -59.00\,\text{mm} - (-61.15\,\text{mm}) = \underline{\underline{2.15\,\text{mm}}}$

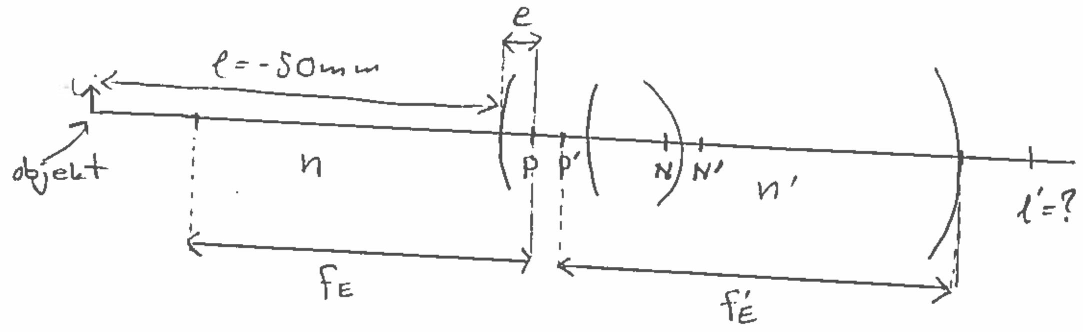
Svar: Linsen styrka är $\underline{\underline{F_E = 21.8\,\text{D}}}$

Främre huvudplan mätt från främre vertex: $\underline{\underline{e = 2.15\,\text{mm}}}$

Bakre huvudplan mätt från bakre vertex $\underline{\underline{e' = -1.3\,\text{mm}}}$

51 || Använd huvudplan & uppgifter i Fig. 6.7 & 6.8 i boken för att beräkna hur långt bakom näthinnan bilden hamnar om objekt ligger $l = -50\,mm$ från hornhinnan.

Lösning: Fig 6.8 i boken ger följande uppgifter:



$e = 1.55\,mm$
$F_E = -16.53\,mm$
$f'_E = 22.04\,mm$
$n = 1$
$n' = \frac{4}{3} = 1.333.$

Eftersom objekt avstånd i uppgiften måste avståndet mellan hornhinna och främre huvudplan plussas på dessa 50mm ⟹

$$l = -(50\,mm + e) = -51.55\,mm$$

Det ger $L = \frac{n}{l} = \frac{1}{-0.05155\,m} = -19.399\,D$

Ögats styrka: $F_E = \frac{n'}{f'_E} = \frac{1.333}{0.02204\,m} = 60.496\,D$

Avbildningsformeln:

$$L' = L + F = -19.399 + 60.496 = \quad D$$

Bild avståndet blir

$$l' = \frac{n'}{L'} = \frac{1.333}{79.895\,D} = 0.03244\,m = 32.44\,mm$$ (mätt från bakre HP)

Bildens avstånd bakom näthinnan blir $l' - f'_E = 32.44 - 22.04 = 10.4\,mm$

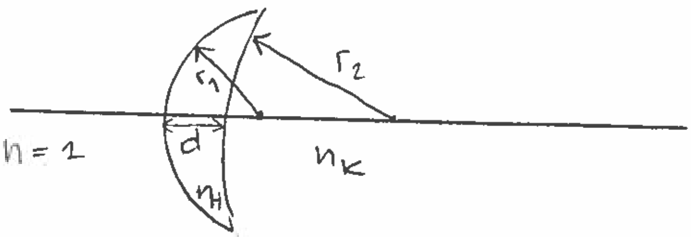
Svar: Bilden hamnar 10.4mm bakom näthinnan.

$$f'_E = \frac{n'}{F_E}$$

$$f_E = \frac{-n}{F_E}$$

52 Bestäm F_E, f'_E och läge för P' (bakre HP) för ögonmodell
$r_1 = 7.80\,mm$, $r_2 = 6.50\,mm$, $d = 0.55\,mm$.
Hornhinna: $n_H = 1.3771$, kammarvätska bakom $n_K = 1.3374$

Lösning:



Främre styrka: $F_1 = \dfrac{n_H - n}{r_1} = \dfrac{1.3771 - 1}{0.0078\,m} = 48.346\,D$

Bakre styrka: $F_2 = \dfrac{n_K - n_H}{r_2} = \dfrac{1.3374 - 1.3771}{0.0065\,m} = -6.108\,D$

Effektiv styrka:

$$F_E = F_1 + F_2 - \frac{d}{n_H} F_1 \cdot F_2 = 48.346 - 6.108 - \frac{0.00055}{1.3771} 48.346 \cdot (-6.108) =$$

$$= 42.356\,D$$

Bakre snittstyrka:

$$F'_V = \frac{F_E}{1 - \frac{d}{n_H} F_1} = \frac{42.356\,D}{1 - \frac{0.00055}{1.3771} 48.346} = 43.191\,D$$

Bakre snittvidd:

$$f'_V = \frac{n_K}{F'_V} = \frac{1.3374}{43.191\,D} = 0.030966\,m = 30.97\,mm$$

Bakre fokallängd

$$f'_E = \frac{n_K}{F_E} = \frac{1.3374}{42.356\,D} = 0.03158\,m = 31.58\,mm$$

Bakre huvudplan (HP)

$$e' = f'_V - f'_E = 30.97\,mm - 31.58\,mm = -0.61\,mm$$

Svar: $F_E = 42.356\,D$, $f'_E = 31.58\,mm$

Bakre HP (dvs P') hamnar 0.61 mm framför bakre vertex!

53 Närsynt öga med styrka $F_{öga} = 60.0D$ korrigeras antingen med kontaktlins $F_K = -10.0D$ eller med glasöga $F_G = -12D$ placerat 16.7mm från öga. Vilken blir effektiva styrka för båda fallen samt hur stor blir bilden av avlägset objekt med synvinkeln $w = 0.17°$?

Lösning:

1) Kontaktlins: ligger tätt mot ögat så att $d = 0$.

Effektiva styrkan blir då

$$F_E = F_{öga} + F_K = 60 - 10 = \underline{\underline{50D}}$$

Storleken på bilden ges av

$$h'_K = f_E \tan(w) = \frac{1}{F_E}\tan(w) = \frac{\tan(0.17°)}{50D} = 5.8 \times 10^{-6}m = 58\mu m$$

2) Glasöga: Nu är $d = 16.7mm$ (avstånd mellan öga & glasöga)

Effektiv styrka blir

$$F_E = F_{öga} + F_G - \frac{d}{n} F_{öga} \cdot F_G \qquad \text{(luft mellan glasög \& öga} \Rightarrow n = 1)$$

$$= 60 - 12 - \frac{0.0167m}{1} \cdot 60 \cdot (-12) = \underline{\underline{60.024D}}$$

Storlek på bild

$$h'_G = f_E \cdot \tan(w) = \frac{1}{F_E}\tan(w) = \frac{\tan(0.17°)}{60.024D} = 48 \times 10^{-6}m = 48\mu m$$

Svar: • Effektiv styrka kontaktlins $\underline{\underline{F_E = 50.0D}}$

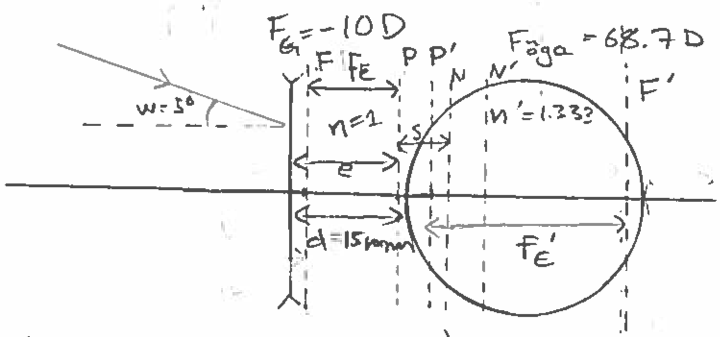
och storlek på bild $\underline{\underline{h'_K = 58\mu m}}$

• Effektiv styrka glasögon $\underline{\underline{F_E = 60.024D}}$

och storlek på bild $\underline{\underline{h'_G = 48\mu m}}$

54 Beräkna alla 6 kardinalpunkter för korrigerat öga med $F_{\text{öga}} = 68.7$ D och $n' = \frac{4}{3} = 1.333$. Glasögon sitter 15mm framför öga med $F_G = -10.0$ D.
Hur stor blir bilden av objekt som upptar synvinkeln $w = 5°$?

Lösning:



Effektiv styrka: $F_E = F_G + F_{\text{öga}} - \frac{d}{n} F_G F_{\text{öga}} = -10 + 68.7 - \frac{0.015}{1}(-10) \cdot 68.7$
$= 69.0$ D

Bakre snittstyrka: $F_v' = \dfrac{F_E}{1 - \frac{d}{n} F_G} = \dfrac{69}{1 - 0.015 \cdot (-10)} = 60$ D

Bakre snittvidd: $f_v' = \dfrac{n'}{F_v'} = \dfrac{1.333}{60 \text{ D}} = 0.02222 \text{ m} = 22.22 \text{ mm}$

Bakre fokallängd: $f_E' = \dfrac{n'}{F_E} = \dfrac{1.333}{69 \text{ D}} = 0.01932 \text{ m} = 19.32 \text{ mm}$

Bakre HP: $e' = f_v' - f_E' = 22.22 \text{ mm} - 19.32 \text{ mm} = 2.9 \text{ mm}$
(mätt från bakre vertex)

Främre snittstyrka: $F_v = \dfrac{F_E}{1 - \frac{d}{n} F_{\text{öga}}} = \dfrac{69}{1 - 0.015 \cdot 68.7} = -2262.3$ D

Främre snittvidd: $f_v = -\dfrac{n}{F_v} = \dfrac{-1}{-2266.3 \text{ D}} = 0.000442 \text{ m} = 0.44 \text{ mm}$

Främre fokallängd: $f_E = -\dfrac{n}{F_E} = \dfrac{-1}{69 \text{ D}} = -0.0145 \text{ m} = -14.5 \text{ mm}$

Främre HP: $e = f_v - f_E = 0.44 \text{ mm} - (-14.5 \text{ mm}) = 14.95 \text{ mm}$
(mätt från främre vertex)

Mätt från respektive HP så hamnar respektive nodalpunkt på avståndet $s = f_E' + f_E = 19.32 \text{ mm} + (-14.5 \text{ mm}) = 4.82 \text{ mm}$

Till slut fås bildstorleken genom $h' = f_E \tan(w) = 14.5 \cdot \tan(5°) =$
$= \underline{1.27 \text{ mm}}$

Svar: Bildstorleken är $\underline{h' = 1.27 \text{ mm}}$

Kardinalpunkterna (F, F', P, P', N, N') hamnar som i ritade figuren med sträckorna:
$\underline{s = 4.82 \text{ mm}}$, $\underline{e = 14.95 \text{ mm}}$, $\underline{e' = 2.9 \text{ mm}}$, $\underline{f_E = -14.5 \text{ mm}}$, $\underline{f_E' = 19.32 \text{ mm}}$

55 || Kamera med plant frontglas och $n' = 1.6$.
I luft upptar objekt med synvinkeln $w = 5°$ bildstorleken $h' = 2.6$ mm. Hur stor blir bilden av samma objekt i vatten?

Lösning: Bildstorleken ges av

$$h' = f_E \tan(w) = \frac{\tan(w)}{F_E} \iff F_E = \frac{\tan(w)}{h'}$$

I luft blir då styrkan $F_{E,luft} = \frac{\tan(5°)}{0.0026m} = 33\,D$

Eftersom linsens främre yta är plan blir den främre styrkan på linsen 0 (dvs $F_1 = 0$)
Detta inser man genom att kurvaturen på främre ytan är 0 (eller krökningsradie $= \infty \implies R_1 = 0$) och ytans styrka är $F_1 = (n' - n)R_1 = (1.6 - 1) \cdot 0 = 0$ (i luft.)
Det samma gäller ju i vatten $F_1 = (n' - n_{vatten})R_1 = (1.6 - 1.33) \cdot 0 = 0$
Alltså är hela linsens styrka samma i vatten som i luft!

$$F_{E,vatten} = F_{E,luft} = 33\,D.$$

Däremot blir främre fokallängden annorlunda:

$$f_{vatten} = \frac{n_{vatten}}{F_E} = \frac{1.333}{33\,D} = 0.040\,m = 40\,mm$$

Bildens storlek i vatten blir

$$h' = f_{vatten} \cdot \tan(w) = 40\,mm \cdot \tan(5°) = \underline{\underline{3.5\,mm}}$$

Svar: I vatten blir bilden $\underline{\underline{3.5\text{ mm}}}$ stor.

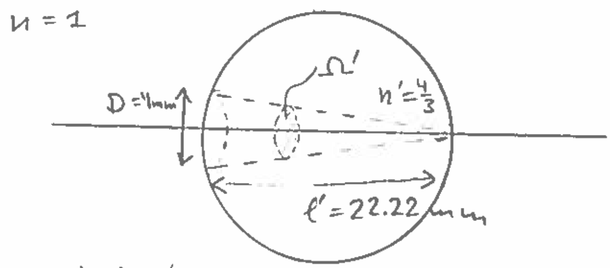
56 II Vilken maximal luminans får armatur ha så att belysning på näthinnan inte överstiger 50 lux vid pupilldiameter 4mm och ögat tittar rakt mot ljuskälla?

Lösning: Sambandet mellan belysning E_v' på näthinnan och luminansen L_v ges av

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega' L_v,$$

där $n=1$ är brytningsindex i luft och $n' = \frac{4}{3} = 1.333$ är brytningsindex i ögat (enkel ögonmodell).

Ω' är rymdvinkeln som pupillen upptar. För att beräkna den antag reducerad ögonmodell:



Rymdvinkeln (som den är utritad i figuren) ges av pupillens area delat på ögats längd i kvadrat.

Om $r = \frac{D}{2} = 2\text{mm}$ är pupillens radie så blir pupillens area ungefär πr^2 (eftersom $5r < \ell'$) och rymdvinkeln blir därmed $\Omega' = \frac{\pi r^2}{\ell'^2}$.

Stoppa in detta i uttrycket för E_v' ger

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{\pi r^2}{\ell'^2} L_v$$ lös ut L_v ger

$$L_v = \frac{E_v' \ell'^2}{\pi r^2}\left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \left\{\begin{array}{l}\text{Stoppa in} \\ \text{värden och} \\ \text{kom ihåg } E_v' = 50 \text{ lux}\end{array}\right\} = \frac{50 \cdot 22.22^2}{\pi \cdot 2^2}\left(\frac{1}{1.333}\right)^2 =$$

$$= \underline{1105 \text{ cd/m}^2}$$

Svar: Armaturens maximala luminans ska vara $\underline{\underline{1105 \text{ cd/m}^2}}$

57 Avlägset objekt med luminans $L_v = 500\,cd/m^2$ fotogra[fera]s med objektiv $f' = 50\,mm$. Hur förändras belysningen i bildplanet om bländartalet ändras från 8 till 11?

Lösning: Belysningen i bildplanet ges av

$$E_v' = L_v \Omega' \quad \text{(antar att } n' = 1 \text{ inne i kameran)}$$

där Ω' är rymdvinkeln som aperturstoppet tar upp.

Eftersom objektet är avlägset hamnar bilden i $f' = 50\,mm$.

Rymdvinkeln kan approximeras med aperturstoppets area delat på f'^2.

Om r är aperturstoppets radie så är $D = 2r$ aperturstoppets diameter. Denna kan räknas ut m.h.a bländartalet:

$$f_{/\#} = \frac{f'}{D} \iff D = \frac{f'}{f_{/\#}} \Rightarrow r = \frac{D}{2} = \frac{f'}{2f_{/\#}}$$

Alltså blir rymdvinkeln:

$$\Omega' = \frac{\pi r^2}{f'^2} = \left\{ r = \frac{f'}{2f_{/\#}} \right\} = \frac{\pi \left(\frac{f'}{2f_{/\#}}\right)^2}{f'^2} = \frac{\pi}{4f_{/\#}^2}$$

Stoppa in detta i uttrycket för E_v' ger att

$$E_v' = L_v \cdot \frac{\pi}{4f_{/\#}^2}$$ beräkna för de två bländartalen

$f_{/\#} = 8$: $E_v' = 500 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot 8^2} = \underline{6.14\,lux}$

$f_{/\#} = 11$: $E_v' = 500 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot 11^2} = \underline{3.25\,lux}$

Svar: Belysningen minskar från 6.14 lux till 3.25 lux när bländartalet ökar från 8 till 11 (dvs minskar med 53%)

58 Öga med D=6.0mm pupill tittar på avlägsen bildskärm med luminansen $L_v = 200\,cd/m^2$ genom optiskt system bestående av 4 akromater, alla har $f' = 100$mm. Linserna placeras 100mm, 300mm, 500mm, 700mm framför ögat. Ögat ser skarpt & inga aberrationer. Pupill är AS. Vilken är belysningen på näthinnan?

Lösning: Luminansen bevaras genom optiska system och eftersom pupill är AS (aperturstopp) så har linserna ingen betydelse för belysningen på näthinnan! Alltså ges belysningen E_v' av formeln

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L_v \Omega'.$$

Om reducerad ögonmodell antas så kan rymdvinkeln räknas ut på precis samma sätt som i uppgift 56.

$$\Omega' \simeq \frac{\pi r^2}{l'^2}$$

där $r = \frac{D}{2} = 3.0$mm är pupillens radie och $l' = 22.22$ mm är ögats längd. Vidare så är $n' = \frac{4}{3} = 1.333...$ ögats brytningsindex och $n=1$ (luft). Alltså blir belysningen på näthinnan:

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L_v \Omega' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L_v \frac{\pi r^2}{l'^2} = \left(\frac{1.333}{1}\right)^2 \cdot 200 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{22.22^2} = \underline{\underline{20.4\,\text{lux}}}$$

Svar: Belysningen på näthinnan blir $\underline{\underline{20.4\ \text{lux}}}$

59 Solen har diameter $D_s = 1.4 \cdot 10^9$ m och massan $m = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Solens luminans $L_v = 1.6 \times 10^9$ cd/m². Hur stor blir belysningen på näthinnan om pupilldiameter $D = 2.0$ mm? Hur förändras belysningen på näthinnan om halva solen täcks vid solförmörkelse?

Lösning: Belysningen på näthinnan ges som vanligt av

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L_v \Omega'$$

där $n' = \frac{4}{3} = 1.333\ldots$ är ögatsbrytningsindex och $n = 1$ är brytningsindex vid solen (i rymden, samma som luft typ).

$L_v = 1.6 \times 10^9$ cd/m² är solens luminans och Ω' är rymdvinkeln som pupillen upptar sett från näthinnan.

Antag reducerad ögonmodell: $\ell' = 22.22$ mm och $r = \frac{D}{2} = 1$ mm är pupillens radie. Då kan rymdvinkeln uppskattas på precis samma sätt som i uppgift 56 & 58 dvs

$$\Omega' \approx \frac{\pi r^2}{\ell'^2} \Rightarrow$$

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L_v \frac{\pi r^2}{\ell'^2} = 1.333^2 \cdot 1.6 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{22.22^2} = 18 \times 10^6 \text{ lux}$$

$$= 18 \text{ Mlux}$$

Svar: Belysningen på näthinnan blir $E_v' = 18$ Mlux

Om det blir solförmörkelse skalas belysningen på näthinna proportionellt mot solens luminans.
Vid 50% solförmörkelse ändras luminansen inte nämnvärt och belysningen på hornhinnan blir densamma!

60

Vilken luminans måste bildskärm ha för att ge samma belysning på näthinnan som vanligt vitt papper belyst med 600 lux? (Pappers reflektans ~90%).

Lösning: Pappret kan ses som en lambertspridare så att luminansen från pappret ges av:

$$L_{papper} = \frac{RE_v}{\pi}$$

där E_v är belysningen som pappret blir belyst med R är reflektansen. Därmed blir papprets luminans:

$$L_{papper} = \frac{0.9 \cdot 600 \text{lux}}{\pi} = 172 \text{ cd}/\text{m}^2$$

Belysning på näthinnan beror endast på objektets luminans. Därför måste skärmens luminans vara samma som papprets för att ge samma belysning på näthinnan, dvs.

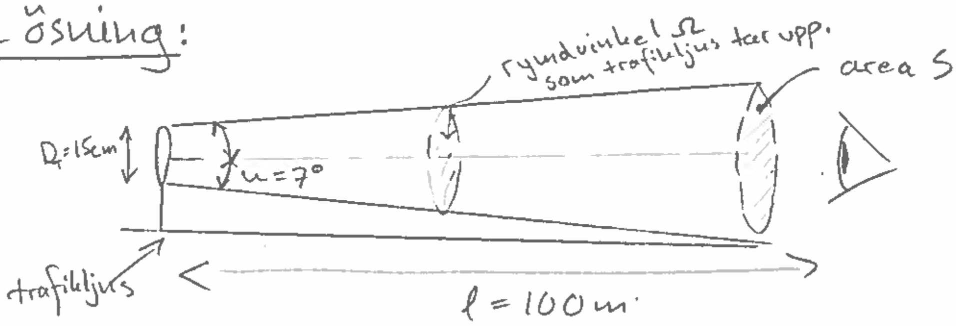
$$L_{skärm} = L_{papper} = 172 \text{ cd}/\text{m}^2$$

Svar: Skärmens luminans ska vara $\underline{\underline{L = 172 \text{ cd}/\text{m}^2}}$

61 Trafikljus: cirkel med diameter 15cm som ger $\Phi_T = 17$ lm i kon med toppvinkel 14°. Hur stort blir ljusflödet in i ögat och vad blir belysningen på näthinnan om pupilldiameter är 3mm och trafikljus 100m bo

(ingen diffraktion el. aberration)

Lösning:



Ljusflödet genom pupillen ges av

$$\Phi_p = I_v \Omega_p$$

där I_v är trafikljuset ljusstyrka och Ω_p är rymdvinkeln pupillen upptar sett från trafikljuset. Räknar först ut I_v. Det görs m.h.a formeln

$$I_v = \frac{\Phi_T}{\Omega}$$ där $\Phi_T = 17$ lm är trafikljusets ljusflöde

och Ω är rymdvinkeln för ljuskonen som ges av

$$\Omega = 2\pi(1-\cos u) = 2\pi(1-\cos 7°) = 0.0468\,\text{sr} \Rightarrow$$

$$I_v = \frac{17\,\text{lm}}{0.0468\,\text{sr}} = 363\,\text{cd}.$$

Rymdvinkeln som pupillen upptar sett från trafikljuset ges av

$$\Omega_p \simeq \frac{\pi r^2}{l^2} = \begin{Bmatrix} r = 1.5\,\text{mm} \\ \text{pupillens radie} \end{Bmatrix} = \frac{\pi \cdot 1.5^2}{100000\,\text{mm}^2} = 7.07 \times 10^{-10}\,\text{sr}$$

Så att flödet genom pupillen blir

$$\Phi_p = I_v \Omega_p = 363\,\text{cd} \cdot 7.07 \times 10^{-10}\,\text{sr} = 2.57 \times 10^{-7}\,\text{lm} =$$

$$\underline{\underline{= 257\,\text{nlm}}}$$

61 forts: Nu återstår att beräkna belysningen på näthinnan.

Det görs som vanligt med formeln

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L_v \Omega'$$

där $n' = \frac{4}{3} = 1.333..$ ögats brytningsindex, $n = 1$ (luft)

och $\Omega' = \frac{\pi r^2}{\ell'^2} = 0.014317\,sr$ $r = 1.5\,mm$ (pupillens radie)

och $\ell' = 22.22\,mm$ (ögats längd, reducerad ögonmodell)

L_v är objektets luminans som ges av formeln

$$L_v = \frac{I_v}{A}$$ där $I_v = 363\,cd$ (räknades ut på föregående sida)

och A är objektets area, dvs trafikljusets area:

$$A = \pi \cdot 0.075\,m^2 = 0.0177\,m^2$$

Som ger luminansen

$$L_v = \frac{363\,cd}{0.0177\,m^2} = 20540\,cd/m^2$$

Belysningen på näthinnan blir då

$$E_v' = 1.333^2 \cdot 20540\,cd/m^2 \cdot 0.014317\,sr = \underline{\underline{522\,lux}}$$

Svar: ljusflödet genom pupillen är $\underline{\underline{\Phi_p = 257\,nlm}}$

och belysningen på näthinnan är $\underline{\underline{E_v' = 522\,lux}}$

62 Gränsvärde för långtidsskador på näthinna ~2500 lux. Vad motsvarar detta (i lämplig storhet) för stark lysande ljuskälla? Antag enkel ögonmodell.

<u>Lösning:</u> Belysningen på näthinnan ges av luminansen hos objektet och ges av;

$$E'_v = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega' L_v$$

Som vanligt är $n' = \frac{4}{3} = 1.333\ldots$ ögats brytningsindex och $n = 1$ (luft). Ω' är rymdvinkeln som pupillen upptar sett från näthinnan.

Maximal belysning $E'_v = 2500$ lux. Lös ut L_v ur formeln för E'_v ger

$$L_v = \frac{E'_v}{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega'}$$

Rymdvinkeln kan uppskattas genom $\Omega' \approx \frac{\pi r^2}{f'^2}$ om $r < \frac{f'}{5}$. Där r är pupillens radie och $f' = 22.22$ mm för reducerad ögonmodell.

Välj därför $r = 4$ mm (stor pupill men approximation gäller ändå)

$$\Omega' = \frac{\pi \cdot 4^2}{22.22^2} = 0.10 \text{ sr}$$ detta ger luminansen

$$L_v = \frac{2500 \text{ lux}}{1.333^2 \cdot 0.10 \text{sr}} = 14000 \text{ cd/m}^2$$

<u>Svar:</u> Om pupillen är 8mm får ljuskällan max ha luminansen <u>14000 cd/m²</u>

63 Två runda lysdioder:

Lysdiod 1: $D_1 = 10\,mm$, $\phi_{v_1} = 0.1\ lm$, konvinkel 8°
Lysdiod 2: $D_2 = 5\,mm$, $\phi_{v_2} = 0.26\ lm$, konvinkel 20°

Vilken diod ser ut att lysa starkast när de betraktas på 0.5m avstånd?

Lösning: Belysningen på näthinnan är det som avgör vad som ser ut att lysa starkast.

Belysningen på näthinnan ges av

$$E_v' = \left(\frac{n'}{n}\right)\Omega' L_v$$

där L_v är objektets luminans. Därför är den lysdiod med störst luminans som upplevs som starkast. Luminansen ges av formeln

$$L_v = \frac{\phi_v}{\Omega A}$$ där ϕ_v är diodens ljusflöde

Ω är rymdvinkeln för ljuskonen och A är diodens area. Beräkna L_v för de två dioderna var för sig.

Diod 1: $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}D_1^2 = \frac{\pi}{4}\cdot 0.01\,m^2 = 78.5\times10^{-6}\,m$

$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$ där θ är halva toppvinkeln

$\Rightarrow \Omega = 2\pi(1-\cos 4°) = 0.015\ sr$

$$L_1 = \frac{\phi_{v_1}}{\Omega A} = \frac{0.1\ lm}{0.015\,sr\cdot 78.5\times10^{-6}\,m^2} = \underline{83000\ cd/m^2}$$

Diod 2: $A = \frac{\pi}{4}D_2^2 = \frac{\pi}{4}\cdot 0.005^2 = 19.6\times10^{-6}\,m^2$

$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta) = 2\pi(1-\cos 10°) = 0.38\,sr$

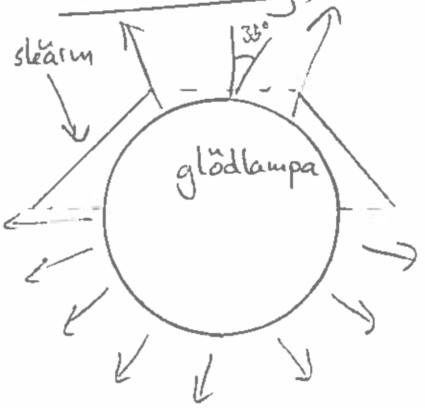
$$L_2 = \frac{\phi_{v_2}}{\Omega A} = \frac{0.26}{0.38\,sr\cdot 19.6\times10^{-6}\,m^2} = \underline{139000\ cd/m^2}$$

Svar: $L_2 > L_1$ alltså ser lysdiod 2 starkare ut!

64 60W glödlampa har vit lampskärm (reflektor)

Glödlampan är punktkälla och ger $\Phi_v = 600$ lm. Skärmen samlar upp allt ljus som sprids i halvsfär från glödlampan och reflekterar 80% av detta ljus till kon med toppvinkel 70°. Vad är totala styrkan för skrivbordslampan (glödlampa + skärm)?

Lösning:



Scenariot ser ungefär ut som i figuren. Ljusstyrkan ges av formeln

$$I_v = \frac{\Phi_v}{\Omega}$$

där Φ_v är ljusflödet och Ω är rymdvinkeln i flödets riktning...

2 fall: ljusflödet uppåt och ljusflödet nedåt.

Uppåt: Hälften av ljuset sprids uppåt men bara 80% reflekteras det ger

$$\Phi_{upp} = 0.8 \cdot \frac{\Phi_v}{2} = 0.8 \cdot \frac{600 \text{ lm}}{2} = 240 \text{ lm}.$$

Rymdvinkeln ges av konens halva toppvinkel $\theta = 35°$

$$\Omega_{upp} = 2\pi(1 - \cos 35°) = 1.136$$

Detta ger $I_{v,upp} = \frac{\Phi_{upp}}{\Omega_{upp}} = 211.2$ cd

Nedåt: Hälften av ljuset sprids nedåt så att

$$\Phi_{ner} = \frac{\Phi_v}{2} = \frac{600 \text{ lm}}{2} = 300 \text{ lm}$$

Det sprids i en halvsfär $\Rightarrow \Omega_{ner} = 2\pi$ sr (helsfär är 4π)

$$I_{v,ner} = \frac{\Phi_{ner}}{\Omega_{ner}} = \frac{300 \text{ lm}}{2\pi} = 47.7 \text{ cd}$$

Total ljusstyrka blir $I_v = I_{v,upp} + I_{v,ner} = 211.2 + 47.7 = 259$

Svar: Total ljusstyrkan blir 259 cd

651 Jämför 2 fall

1) Fullt solljus, $E_{v,1} = 10^5$ lux lyser på snötäckt mark, lambertspridare $R_1 = 100\%$. ögats pupill $D_1 = 1$m.

2) Månljus $E_{v,2} = 0.1$ lux lyser på barmark lambertspridare $R_2 = 20\%$. ögats pupill $D_2 = 6$mm.

Hur många ggr högre blir belysningen på näthinnan i fall 1?

Lösning:

1) Markens luminans blir $L_1 = \frac{R E_{v,1}}{\pi} = \frac{1 \cdot 10^5 \text{ lux}}{\pi} =$

$= 32000 \text{ cd/m}^2$

Pupillens rymdvinkel sett från näthinnan är

$$\Omega_1' = \frac{\pi r_1^2}{\ell'^2} = \frac{\pi \, 0.5^2}{22.22^2} = 0.0016 \text{ sr}$$

Belysning på näthinnan blir

$$E_{v,2}' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega_1' L_1 = 1.33^2 \cdot 0.0016 \text{sr} \cdot 32000 \text{ cd/m}^2 = \underline{\underline{91 \text{ lux}}}$$

2) Markens luminans $L_2 = \frac{R E_{v,2}}{\pi} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{\pi} = 0.0064 \text{ cd/}$

Pupillens rymdvinkel

$$\Omega_2' = \frac{\pi r_2^2}{\ell'^2} = \frac{\pi \cdot 3^2}{22.22^2} = 0.057 \text{ sr}$$

Belysning på näthinnan:

$$E_{v,2}' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Omega_2' L_2 = 1.33^2 \cdot 0.057 \cdot 0.0064 = \underline{0.00065}$$

Detta ger $\frac{E_{v,1}}{E_{v,2}} = \frac{91 \text{ lux}}{0.00065 \text{ lux}} = \underline{\underline{140000}}$

Svar: Belysningen på näthinnan blir 140000 ggr högre i fall 1.

66 ||

Figur i övningshäfte visar strålgång genom kameraobjektivs extremlägen (läge A & läge B).
Bländartal $f_{\#} = 2.8$ i båda fallen.
Avlägset objekt har luminans $L_v = 200\ cd/m^2$
Hur ändras belysningen i bildplanet för de två lägena?

Lösning: Belysningen i bildplanet ges av

$$E_v' = \Omega' L_v \left(\frac{n'}{n}\right)$$

dvs den beror endast på rymdvinkeln och luminansen. Luminansen bevaras genom optiska system så den är samma i båda fallen.

Rymdvinkeln ges av $\Omega' = 2\pi(1-\cos\theta)$ där

θ är halva toppvinkeln för inkommande kon mot bildplanet. Mäter man i figurerna inser man lätt att θ är samma i båda fallen, alltså är rymdvinkeln den samma i båda fallen.
Därmed är belysningen i bildplanet den samma i båda fallen, dvs den ändras inte alls från läge A till läge B!

Svar: Belysningen i bildplanet är exakt samma i läge A som i läge B.

67 Diffraktiv lins har olika fokallängd för olika ordningar. Antag multifokal lins med styrkorna 0 D, +1.5 D, +3.0 D. Hur tätt är linjemönstret i kanten om diametern är $D = 7.0$ mm?

Lösning: För ordningen $m=0$ bryts inte ljuset alls och styrkan är således 0 D.

Därför är det mest troligt att styrkan $F = +1.5$ D tillhör ordningen $m = 1$.

Använd följande formel:

$$F_m = \frac{m\lambda}{y(b+c)} \quad \text{där } m = 1 \text{ är ordningen}$$

$y = \frac{D}{2} = 3.5$ mm är linsens radie, $F_m = F = +1.5$ D

och $b+c$ är bredden på ett randpar, $\lambda = 550$ nm våglängden för grönt ljus.

Eftersom $b+c$ är linjeparets bredd så ges linjetätheten av (lös ut i formeln ovan)

$$\frac{1}{b+c} = \frac{y F_m}{\lambda} = \frac{3.5 \times 10^{-3}\,\text{m} \cdot 1.5\,\text{D}}{550 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 9.55 \times 10^{3}\ \text{linjer/m}$$

$$= 9.55\ \text{linjer/mm}$$

Svar: linjetätheten i kanten är 9.55 linjer/mm

68 II Hur stor blir minsta möjliga bildstorlek av avlägsen vit punktkälla som avbildas med akromat ($f' = 100$ mm, $D = 20$ mm)?

Lösning: I det här fallet är det diffraktion som sätter gränsen för minsta möjliga bildstorlek, dvs diametern på airydisken

$$2y' = D_{airy} = \frac{1.22\lambda}{NA}$$

där NA är numeriska aperturen och kan approximeras med $NA = \frac{D/2}{f'} = \frac{D}{2f'}$ som då ger

$$D_{airy} \simeq \frac{1.22 \cdot 2\lambda \cdot f'}{D} = \left\{ \lambda = 550\,\text{nm} \right\} = \frac{1.22 \cdot 2 \cdot 550 \times 10^{-9}\,\text{m} \cdot 0.1\,\text{m}}{0.02\,\text{m}}$$

$$= 6.7 \times 10^{-6}\,\text{m} = \underline{6.7\,\mu\text{m}}$$

Svar: minsta möjliga bild blir ca $6.7\,\mu$m

69 || Polstjärnan ger belysnin $E_v = 7 \times 10^{-6}$ lux vid jordytan. Vad blir belysningen i bilden (E'_v) om polstjärna avbildas med diffraktionsbegränsat objektiv $f = 50$ mm, $D = 20$ mm ?

Lösning: Luminansen bevaras inte genom optiska system för punktobjekt (pga diffraktion av punktobjekt) Istället räkna ut ljusflödet in i bilden och sen dividera med bildens area.

Flödet ges av:

$$\Phi_v = E_v \cdot A_{lins} = 7 \times 10^{-6} \text{ lux} \cdot \pi \, 0.01 \text{ m}^2 = 2.2 \times 10^{-9} \text{ lm.}$$

Bildens area ges av airydiskens diameter

$$y = \frac{1.22 \cdot \lambda f'}{D} = \frac{1.22 \cdot 550 \times 10^{-9} \text{ m} \cdot 0.05 \text{ m}}{0.02 \text{ m}} = 1.68 \mu\text{m}$$

Så att bildens area blir

$$A_{bild} = \pi y^2 = \pi (1.68 \times 10^{-6} \text{ m})^2 = 8.84 \times 10^{-12} \text{ m}^2$$

Till slut fås belysningen i bilden

$$E'_v = \frac{\Phi_v}{A_{bild}} = \frac{2.2 \times 10^{-9} \text{ lm}}{8.84 \times 10^{-12} \text{ m}^2} = 250 \text{ lux}$$

Svar: belysning i bild blir 250 lux.

70 || Hur stor är minsta möjliga bildstorlek pga longitudinell kromatisk aberration när vit punktkälla avbildas med diffraktiv lins ($f' = 100$ mm, $D = 10$ mm

Lösning: Minsta möjliga bildstorlek ges av diametern för spridningscirkeln som uppkommer av kromatisk aberration. Den ges av

$$d = D \frac{F_F - F_c}{F_F + F_c} \approx D \frac{F_F - F_c}{2 F_d}$$

där $D = 10$mm och F_F, F_c och F_d är styrkan för blått, rött och grönt ljus.

För kromatisk aberration gäller att

$$F_F - F_c = \frac{F_d}{V_d}$$ där $V_d = -3.5$ är abbetalet

för diffraktiv lins och $F_d = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0.1\,\text{m}} = +10\,\text{D}$.

stoppa in $F_F - F_c = \frac{F_d}{V_d}$ i formeln för d ger

$$d = D \cdot \frac{F_d/V_d}{2 F_d} = \frac{D}{2 V_d} = \frac{10\,\text{mm}}{2 \cdot (-3.5)} = (-)\,1.4\,\text{mm}$$

Svar: Minsta möjliga bild pga kromatisk aberration är 1,4 mm

71 || Sektorstjärna avbildas med diffraktions-begränsat objektiv. Bildavstån $\ell' = 6.0$ m och bilden visas i övningshäftet (förstorad 4ggr). Vilken diameter har objektivet?

Lösning: Sektorstjärnan består av 72 randpar. Mätning i figur ger att vid diametern $d = 12$ mm blir ränderna suddiga. Eftersom figuren är förstorad 4ggr fås för gränsfrekvensen:

$$\frac{s'_{max}}{4} = \frac{72}{\pi \cdot d} = \frac{72}{\pi \cdot 12\text{mm}} \Longleftrightarrow s'_{max} = \frac{4 \cdot 72}{\pi \cdot 10\text{mm}} = 7.64\,\text{linjer/mm}$$

Eftersom objektivet är diffraktionsbegränsat kan s'_{max} också räknas ut på följande sätt.

$$s'_{max} = \frac{n' b}{\lambda \ell'} \quad \text{där } n' = 1,\ \lambda = 550\text{ nm},\ \ell' = 6.0\text{m}$$

och b är objektivets diameter, som ju söks! Lös ut b ur formeln ovan ger

$$b = \frac{s'_{max}\,\lambda \cdot \ell'}{n'} = \frac{7.64\,\text{linjer/mm} \cdot 550 \times 10^{-6}\text{mm} \cdot 6 \times 10^{3}\text{mm}}{1}$$

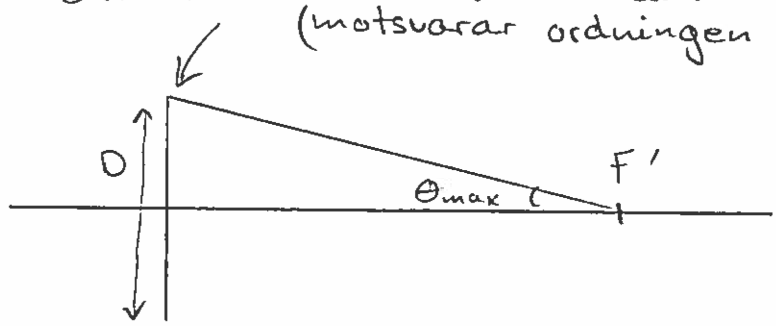
$$= 25.2\text{ mm}$$

Svar: Objektivets diameter är 25.2 mm

72 Viss maskin klar att pressa mönster i diffraktiv lins med maximalt 100 linjer/mm.

Vad är det lägsta bländartal en sådan lins kan få?

Lösning: Störst täthet ute i kanten på linsen. (motsvarar ordningen $m=1$)



Bländartalet ges av $\frac{f'}{D} = \frac{1}{2\tan\theta_{max}} = f_{\#}$ (får ur figur med enkel geometri)

Gitterformeln ger att

$$\sin\theta_{max} = \frac{m\lambda}{b+c} = m\lambda \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b+c}\right)}_{\text{linjetätheten} = 100 \text{ linjer/mm}} = m \cdot \lambda \cdot \text{linjetätheten}$$

För små vinklar gäller att $\tan\theta_{max} \approx \sin\theta_{max}$

stoppa in detta i formeln för $f_{\#}$ ger

$$f_{\#} = \frac{1}{2\tan\theta_{max}} \approx \frac{1}{2\sin\theta_{max}} = \frac{b+c}{2m\lambda} = \frac{1}{2m\lambda \cdot \text{linjetätheten}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 550 \cdot 10^{-6}\,\text{mm} \cdot 100 \text{ linjer/mm}} = 9.1$$

Svar: lägsta möjliga bländartal blir

$$\underline{\underline{f_{\#} = 9.1}}$$

73

Diffraktiv lins med $F_1 = +3$ D (första ordningen) kombineras med planokonvex, tunn, lins gjord av polycarbonat. Vilken styrka F_2 ska polycarbonatlinsen ha för att kombinationen ska få samma styrka för rött & blått ljus?

Lösning: Ur kursboken (Freeman) tabell 14.2 fås att abbetalet för polycarbonat är $V_2 = 29.9$ och för diffaktiv lins är abbetalet $V_1 = -3.5$.

Om linsen har samma styrka för rött & blått ljus så är den akromatisk. Det akromatiska villkoret är

$$\frac{F_1}{V_1} + \frac{F_2}{V_2} = 0 \iff F_2 = -\frac{V_2}{V_1} \cdot F_1$$

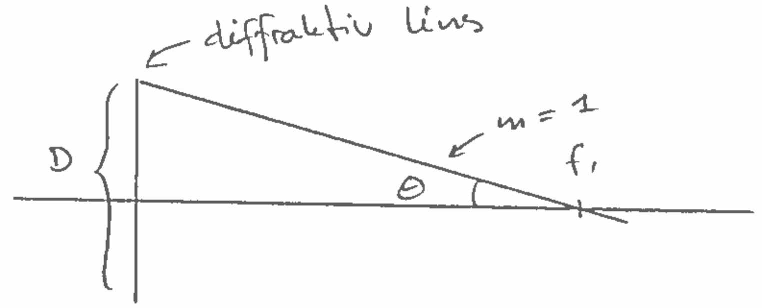
Stoppa in siffervärden:

$$F_2 = -\frac{29.9}{(-3.5)} \cdot 3\text{ D} = \underline{25.6\text{ D}}$$

Svar: polykarbbonatlinsen ska ha styrkan $F_2 = 25.6$ D.

74 || Diffraktiv lins har fokallängden $f_d' = 1m$ (första ordningen) för grönt ljus. Linsens diameter $D=1cm$
Vad är fokallängderna f_F', f_C' för blått resp. rött ljus? (första ordningens fokallängder)

Lösning:



Mha geometri fås ur figuren att

$$f' = \frac{D}{2\tan\theta} \approx \frac{D}{2\sin\theta} \quad (\text{för små } \theta)$$

Gitterformel ger vidare att $\sin\theta = \frac{m\lambda}{b+c}$ som då ger att fokallängden ges av

$$f' \approx \frac{D}{2\sin\theta} = \frac{D(b+c)}{2m\lambda} = \frac{D(b+c)}{2\lambda} \quad \text{ty } m=1.$$

Diametern D och randbredden b+c är alltid samma oberoende av våglängd! Det ger att

$$\frac{f_F'}{f_d'} = \frac{\frac{D(b+c)}{\lambda_F}}{\frac{D(b+c)}{\lambda_d}} = \frac{\lambda_d}{\lambda_F} \Rightarrow f_F' = \frac{\lambda_d}{\lambda_F} \cdot f_d' = \frac{550nm}{490nm} \cdot 1m$$
$$= 1.12 m$$

P.s.s fås för $f_C' = \frac{\lambda_d}{\lambda_C} f_d' = \frac{550nm}{660nm} 1m = \underline{0.83m}$

Svar: $\underline{f_F' = 1.12m}$, $\underline{f_C' = 0.83m}$