Övning 9 – Tenta från 2016-08-24

Del A

1.) Du lyser med en ficklampa rakt mot en vit vägg. Vilken luminans får väggen i mitten av det belysta området? Ficklampan har en ljusstyrka på 70 cd och du står 2.0 m från väggen, som har en reflektans på 90 %. Väggen kan antas vara en lambertspridare.

Givet: Ficklampa med $I_v = 70 \text{ cd}$

Vägg på avståndet r = 2.0 m och med reflektansen R = 0.9. Lambertspridare.

Sökt: Väggens luminans, L_v

Väggen, en lambertspridare

För en lambertspridare gäller att $\Phi_{v,reflekterat} = \pi A L_v$

Vi är ute efter luminansen, så vi skriver om uttrycket ovan som

$$L_v = \frac{\Phi_{v,reflekterat}}{\pi A} = \frac{R \cdot \Phi_{v,ficklampa}}{\pi A}$$

Lägg märke till att vi också skrev om det reflekterande/utgående flödet som det inkommande flödet från ficklampan gånger reflektansen. $\Phi_{v,reflekterat} = R \cdot \Phi_{v,ficklampa}$

I formeln för luminansen ovan är både det totala flödet från ficklampan och den belysta arean okända, och för att slippa räkna ut båda två är det smidigt att skriva om dem som belysningen på väggen.

$$L_v = \frac{R \cdot \Phi_{v,ficklampa}}{\pi A} = \frac{R \cdot E_v}{\pi}$$

Belysningen på väggen, E_v

Belysningen på väggen beror bara av ficklampan och kan räknas ut med

$$E_v = \frac{I_v \cos(i)}{r^2}$$

Rakt framför lampan är infallsvinkeln $i = 0°$ och vi vet redan att $I_v = 70 \text{ cd}$ och r = 2.0 m.

Då kan vi enkelt räkna ut att belysningen är $E_v = \frac{70\cos(0°)}{4} = 17.5 \text{ lx}$ och då blir väggens luminans $L_v = \frac{R \cdot E_v}{\pi} = \frac{0.9 \cdot 17.5}{\pi} = 5.0 \text{ cd/m}^2$

2.) Vitt ljus skickas genom ett tunt prisma med toppvinkel 3.0°. Då blir skillnaden i avböjningvinkel mellan rött och blått ljus 0.060°. Sedan tas prismat bort, och istället sätter man dit ett med toppvinkel 6.0°, gjort av samma glas som det första prismat. Hur stor blir skillnaden i avböjningsvinkel nu?

<u>Givet:</u> Prisma 1: $\alpha_1 = 3.0°$ och $v_{F,1} - v_{C,1} = 0.060°$

Prisma 2: $\alpha_2 = 6.0°$

<u>Sökt:</u> $v_{F,2} - v_{C,2}$

<u>Formel för skillnaden i deviationsvinkel</u>

Deviationsvinkeln i ett tunt prisma ges av $v = (n-1)\alpha$

Skillnaden mellan rött och blått ljus kan då skrivas

$$v_F - v_C = (n_F - 1)\alpha - (n_C - 1)\alpha = (n_F - n_C)\alpha$$

<u>Alternativ 1, lös med proportionalitet</u>

Vi ser att vinkelskillnaden, $v_F - v_C$, är proportionell mot toppvinkeln α

$$v_F - v_C = (n_F - n_C)\alpha$$

Eftersom materialet inte ändras (samma brytningsindex i båda prismorna) ser vi direkt att om toppvinkeln fördubblas, så kommer vinkelskillnaden också göra det.

Svar: $v_{F,2} - v_{C,2} = 2\left(v_{F,1} - v_{C,1}\right) = 2 \cdot 0.06° = 0.12°$

<u>Alternativ 2, sätt in siffror</u>

För det första prismat vet vi att $\alpha_1 = 3.0°$ och $v_{F,1} - v_{C,1} = 0.060°$. Sätter vi in det i

$$v_{F,1} - v_{C,1} = (n_F - n_C)\alpha_1$$

kan vi räkna ut att $n_F - n_C = 0.02$

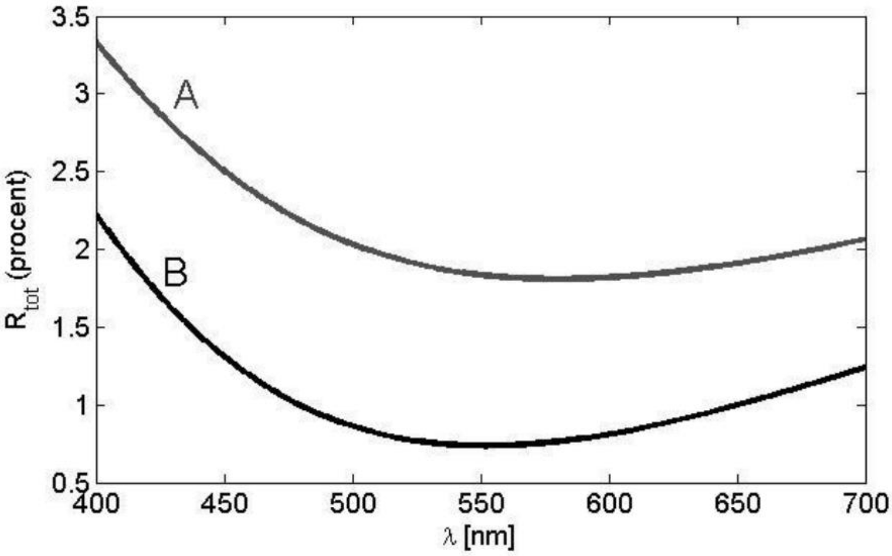
Eftersom materialet inte ändras kan vi använda detta för att räkna ut vinkelskillnaden för det andra prismat

$$v_{F,2} - v_{C,2} = (n_F - n_C)\alpha_2 = 0.02 \cdot 6° = 0.12°$$

3.) Nedan visas reflektansen hos två olika tunna skikt, A och B, för de synliga våglängderna vid vinkelrät infall. Båda skikten är lika tjocka, men det ena består av MgF_2 och det andra av SiO_2. Båda ligger på glas med brytningsindex 1.60.

a) Vilket av skikten är gjort av MgF_2? Motivera ditt svar!

b) Hur tjocka är skikten? (Du kan anta att det minimum som syns i grafen är av den lägsta ordningen.)



Brytningsindex för materialen

Steg ett blir att kolla upp brytningsindex för våra två material i en tabell:

$n_d(\mathrm{MgF_2}) = 1.38$ och $n_d(\mathrm{SiO_2}) = 1.46$

a) Vilket skikt är MgF_2?

Ett sätt att lösa uppgiften är att fundera över vilket material som skulle ge den bästa antireflexbehandlingen. Vi vet att det optimala brytningsindexet för ett AR-skikt är roten ur glasets brytningsindex, dvs

$$n_{optimal\ AR} = \sqrt{n_{glas}} = \sqrt{1.60} = 1.26$$

I vårt fall betyder det att MgF_2 ger en bättre AR-beläggning än SiO_2 eftersom $n_d(\mathrm{MgF_2})$ ligger närmare det optimala värdet än vad $n_d(\mathrm{SiO_2})$ gör.

Man ser i grafen att oavsett vilken våglängd vi tittar på har skikt B lägre reflektans är skikt A. Vi drar därför slutsatsen att det är material B som är MgF_2.

Alternativ lösning: Vi har fallet med *tunnare – tätare – ännu tätare* material och dessutom vet vi att figuren visar första ordningens minimum ($m = 0$). Maximal destruktiv interferens uppstår alltså för en viss våglängd, λ_{min}, som ges av

$\Delta L = 2n_f d = \frac{\lambda_{min}}{2}$ vilket man kan skriva om till $\lambda_{min} = 4n_f d$

Eftersom skiktets tjocklek, d, är densamma för båda materialen kan vi dra slutsatsen att materialet med lägst brytningsindex också kommer ha sitt reflektansminimum för en kortare våglängd.

I figuren ser vi att skikt B har sitt minimum i reflektans för en kortare våglängd än vad skikt A har. Därmed måste det betyda att material B har lägre brytningsindex än material A och alltså är det återigen material B som är MgF_2.

b) Hur tjocka är skikten?

Vi har fallet med *tunnare – tätare – ännu tätare* material, vilket betyder att tjockleken när vi får optimal destruktiv interferens ges av

$$d = \frac{\lambda_{min}}{4n_f}$$

Om vi tittar på material B ser vi att kurvans minimum ligger vid $\lambda_{B,min} = 550 \text{ nm}$ och från uppgift a) vet vi att brytningsindex är $n_B = 1.38$. Sätter vi in dessa värden får vi skiktets tjocklek till

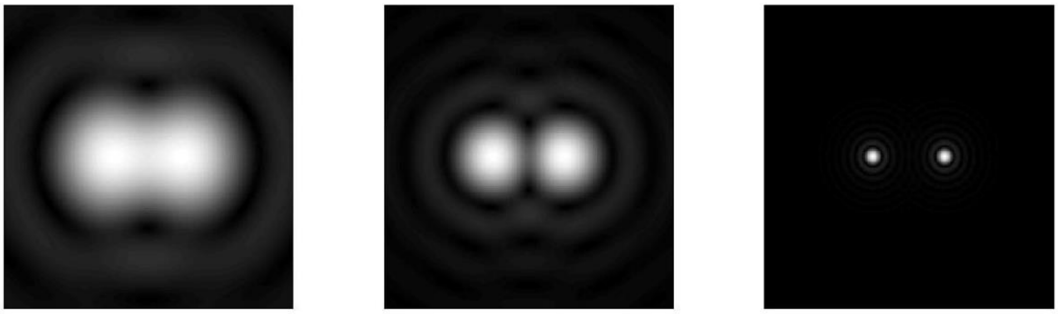
$$d = \frac{\lambda_{B,min}}{4\, n_B} = \frac{550 \text{ nm}}{4 \cdot 1.38} \approx 100 \text{ nm}$$

Om vi vill kan vi kontrollräkna med skikt A också. Där har vi $\lambda_{A,min} = 580 \text{ nm}$ och $n_A = 1.46$

$$d = \frac{\lambda_A}{4\, n_A} = \frac{580 \text{ nm}}{4 \cdot 1.46} \approx 100 \text{ nm}$$

vilket alltså ger samma resultat!

4.) Två lysande punkter som ligger 0.50 mm från varandra ska avbildas. Objektsavståndet är 2.0 m och linsen har fokallängd 1.0 m och aperturdiameter 20 mm. Vilket av de tre alternativen A, B och C nedan visar bäst hur bilden kommer att se ut, förutsatt att linsen är diffraktionsbegränsad? Alla tre bilderna är i samma skala. Motivera ditt svar.



A B C

<u>Givet:</u> Avbildar två punkter på avståndet $h = 0.50\ \mathrm{mm}$ från varandra. Objektavståndet är $l = (-)2.0\ \mathrm{m}$ och linsens diameter $D = 20\ \mathrm{mm}$.

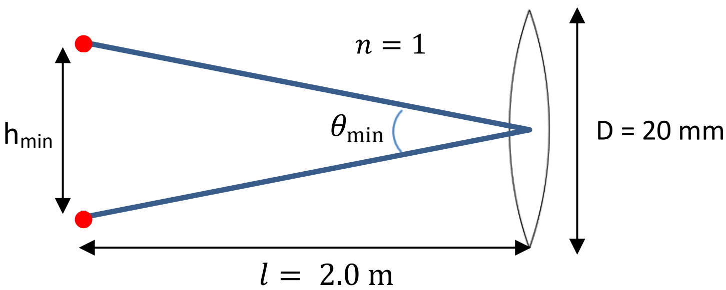
<u>Sökt:</u> Vilken av de tre bilderna ovan visar bäst hur bilden kommer att se ut?

<u>Metod:</u> För att besvara frågan undersöker vi hur stor diffraktionen blir, dvs hur suddiga punkterna kommer att se ut. Kommer punkterna att vara väl separerade i bilden eller kommer de att smälta samman?

<u>Upplösningsvilkoret i objektrymden</u>

Det minsta avstånd mellan objekt som går att upplösa ges av upplösningsvilkoret:

$$\sin\theta_{\mathrm{min}} = \frac{1.22\lambda}{n\,D} \approx \frac{h_{\mathrm{min}}}{l}$$



Vi antar som vanligt att våglängden är $\lambda = 550\ \mathrm{nm}$ och eftersom det är luft vet vi att $n = 1$.

$$h_{min} = \frac{1.22\,\lambda\,l}{n\,D} = \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 2}{1 \cdot 0.02} \approx 70\ \mu\mathrm{m}$$

<u>Jämför med avståndet mellan punkterna</u>

Avståndet mellan punkterna är $h = 0.5\ \mathrm{mm}$, mycket större än minsta upplösta avstånd som är $h_{min} = 70\ \mu\mathrm{m}$. Avståndet mellan punkterna är hela $\frac{0.50}{0.070} \approx 7$ gånger större än upplösningsgränsen och punkterna kommer inte ens vara nära att nudda varandra, utan istället se mycket väl separerade ut. *Det måste alltså vara bild C som är rätt svar!*

5.) Du står i vattnet vid en långgrund havsstrand en blåsig dag. Det går vågor på vattnet. När vågdalarna går förbi dig når vattnet strax över knäna, och när vågtopparna går förbi når vattnet till halsen. Det går ca 7 sekunder mellan varje vågtopp. Mellan dig själv, och en sten som du vet ligger 100 m bort, kan du räkna till 5 vågtoppar. Räkna ut eller uppskatta ungefärliga värden på vågornas amplitud, våglängd, period och hastighet.

Period

Periodtiden är redan given i uppgiften. Det är 7 sekunder mellan varje vågtopp och alltså är T = 7 s.

Våglängd

Det går 5 våglängder på 100 m. Alltså är våglängden $\lambda = \frac{100}{5} = 20\ \mathrm{m}$.

(Egentligen står det att det går 5 våg<u>toppar</u> på 100 m. Beroende på hur vågorna ligger får det alltså plats någonstans mellan 4 och 6 hela våglängder på 100 m. Den exakta våglängden går alltså inte att veta, men uppskattningsvis 20 m. Det går bra att räkna med vilket värde man vill mellan 4 och 6.)

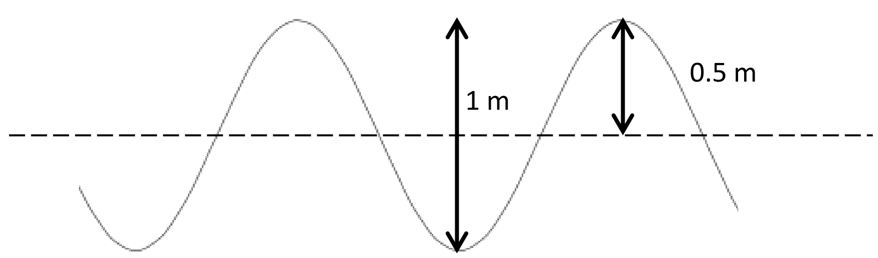
Våghastighet

Hastigheten hos en våg ges av

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{20\ \mathrm{m}}{7\ \mathrm{s}} \approx 3\ \mathrm{m/s}$$

Amplitud

Vi vet att vågdalarna når till knäna och vågtopparna till halsen. Låt säga att det motsvarar en höjdskillnad på 1 m. Amplituden är hälften av detta, dvs 0.5 m.



Del B

6.) Du har ett polarisationsfilter, men vet inte genomsläppsriktningen. Föreslå en metod för att ta reda på den. Du har inga fler polarisationsfilter, men har tillgång till t.ex. öppna behållare med vatten, glasskivor, (opolariserade) lampor och (opolarisrade) lasrar.

Givet: Ett polarisationsfilter. Material såsom vatten, glasskivor, opolariserade lampor och lasrar.

Sökt: Ett sätt att bestämma filtrers genomsläppsriktning.

Metod: Vi behöver ett sätt att skapa linjärpolariserat ljus med känd riktning. Sen är det bara att hålla upp filtret mot ljuset, vrida på det, och hitta den riktning där mest ljus släpps igenom!

Polariserat ljus

Ett sätt att få polariserat ljus från en opolariserad lampa vore att belysa antingen en glasplatta eller vattenyta i ungefär Brewstervinkel. För en vattenyta är Brewstervinkeln

$$i_B = \arctan\left(\frac{n'}{n}\right) = \arctan\left(\frac{n_{vatten}}{n_{luft}}\right) = \arctan\left(\frac{1.333}{1}\right) \approx 53°$$

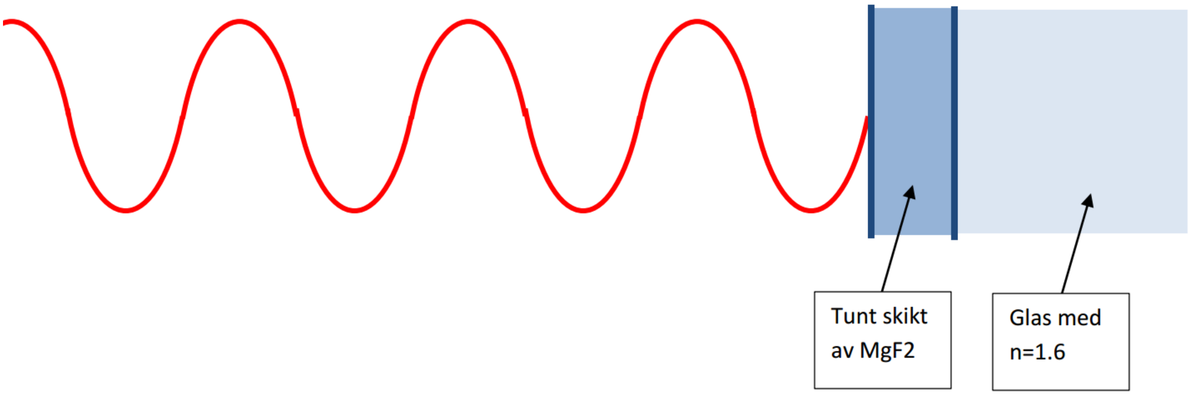
Om vi belyser vattenytan vid ungefär 53° infallsvinkel (behöver inte vara exakt, det räcker att ljuset blir delvis polariserat) vet vi att majoriteten av det reflekterade ljuset kommer vara polariserat horisontellt längs med vattenytan.

Bestäm filtrets genomsläppsriktning

Titta nu på det reflekterade ljuset genom polarisationsfiltret, samtidigt som du vrider på det. I något läge kommer ljuset att vara som allra starkast och då vet du att filtrets genomsläppsriktning matchar ljusets polarisationsriktning!

Titta på reflekterat ljus i brewstervinkeln. När intensiteten är maximal vet du att filtrets genomsläppsriktning är parallell med den reflekterande ytan!

7.) Nedan visas ett tunt skikt på en glasyta, samt en ljusvåg som är på väg mot skiktet. Figuren är skalenlig, men okänd skala. Skiktet är gjort av MgF_2, och glaset har brytningsindex 1.60. Använd information ur figuren (t.ex. kan du mäta i figuren, eller rita i den) till att avgöra om skiktet kommer att öka eller minsta ytans reflektans.



Givet: Skalenlig bild. $n_f = 1.38$ och $n_g = 1.60$

Sökt: Konstruktiv eller destruktiv interferens?

Mät i figuren!

Genom att mäta med linjal i figuren kan man få våglängden i luft till 36 mm (i någon okänd skala). Våglängden i MgF_2-skiktet blir kortare än så, den blir

$$\frac{36\text{ mm}}{n_f} = \frac{36\text{ mm}}{1.38} = 26\text{ mm}$$

Skiktets tjocklek kan mätas till 13 mm (fortfarande i samma okända skala) vilket betyder att *skiktet är precis en halv våglängd tjockt*.

Vilken typ av interferens får vi?

Vi har fallet reflektion i *tunnare – tätare – ännu tätare* material. Då gäller att konstruktiv interferens uppstår när $d = \frac{\lambda}{2n_f}$, dvs när skiktet är en halv våglängd tjockt (eller någon multipel av detta).

Vi kan också bekräfta genom att sätta in siffror och se att det stämmer: $13 \approx \frac{36}{2 \cdot 1.38}$

Vi får alltså konstruktiv interferens och reflektansen blir maximal!

8.) En viss laser genererar en kollimerad laserstråle med våglängd 532 nm, effekt 30 mW och diameter 2 mm. Antag att någon sedan tittar in i denna laserstråle (Obs! Titta aldrig in i en laserstråle, förutom i instrument som är gjorda för det.) Gränsvärdet för långtidsskador på näthinnan motsvarar ca 2500 lux mot näthinnan. Finns det risk för skador på näthinnan i detta fall? Du kan anta en enkel ögonmodell med pupilldiameter 4 mm, samt att ögat är diffraktionsbegränsat. Svar utan motivering ger 0 p.

Givet: Laser med $\lambda = 532 \text{ nm}$, effekt $P = 30 \text{ mW}$ och diameter $h_{laser} = 2 \text{ mm}$.

Öga med pupilldiameter $h_{pupill} = 4 \text{ mm}$.

Skador uppstår vid $E_{v,gränsvärde} = 2500 \text{ lx}$

Sökt: Finns det risk för skador på näthinnan?

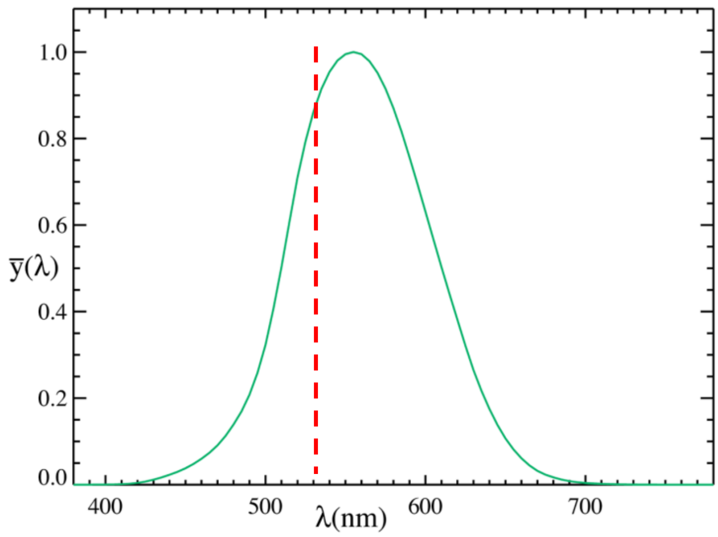
Hur stort flöde går in i ögat?

Eftersom $h_{laser} < h_{pupill}$ vet vi att hela lasereffekten på 30 mW kommer in i ögat.

Nu måste vi bara omvandla 30 mW till lumen. Om vi läser av ögats känslighetskurva (fotopisk känslighetskurva visas i figuren till höger) vid vår våglängd (532 nm) får vi ett värde på ca 0.85.

Flödet blir alltså:

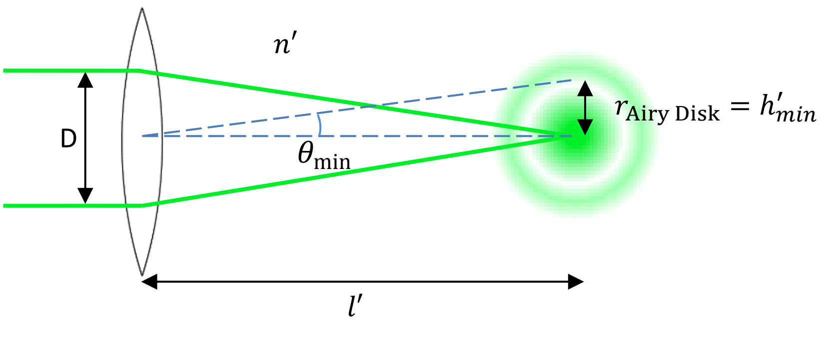
$$\Phi_v = 683 \cdot 0.85 \cdot 0.030 = 17 \text{ lm}$$



Belyst area på näthinnan

För att veta belysningen, och därmed avgöra om lasern är farlig, behöver vi veta hur stor area dessa 17 lm fördelas över. I vårt diffraktionsbegränsade öga är det bara diffraktionen som begränsar hur liten den fokuserade fläcken på näthinnan kan bli. Vi tittar alltså på radien på Airy Disk:

$$\sin\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n'D} \approx \frac{h'_{\min}}{l'}$$



Från Emsleys reducerade ögonmodell hämtar vi $l' = 22.22 \text{ mm}$ och $n' = 1.333$. Däremot ska vi inte använda pupillens diameter som värde på D. Istället tar vi laserstålens diameter så att $D = h_{laser} = 2 \text{ mm}$. Orsaken till detta är att laserstrålen (som är 2 mm) är mindre än pupillen (som är 4 mm). Pupillens diameter är alltså inte med och begränsar strålen överhuvudtaget.

Sätter vi in våra värden får vi radien på Airy Disk till:

$$h'_{\min} = \frac{1.22\,\lambda\, l'}{n' D} = \frac{1.22 \cdot 532 \cdot 10^{-9} \cdot 0.022}{1.3333 \cdot 0.002} = 5.4\ \mu\text{m}$$

Den belysta arean på näthinnan blir

$$A = \pi {h'_{\min}}^2 = 9 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^2$$

Belysningen på näthinnan

Belysningen är flödet delat på arean, dvs

$$E_v = \frac{\Phi_v}{\text{A}} \approx 2 \cdot 10^{11}\ \text{lx}$$

Det är ohyggligt mycket mer än gränsvärdet på ynka 2500 lx. Den här lasern ger definitivt skador om man tittar rakt in i den! (även vid mycket korta exponeringar)