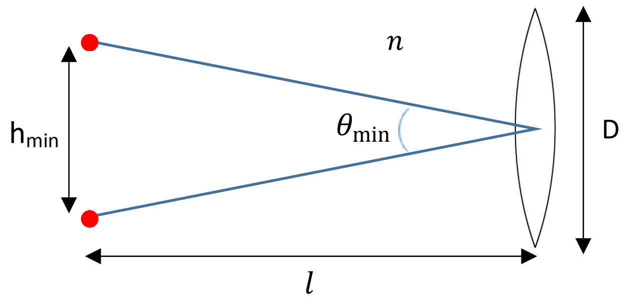
Övning 8 – Diffraktion och upplösning

Diffraktionsbegränsade system

Om man tittar på ett objekt genom ett perfekt (aberrationsfritt) optiskt system avgörs hur små saker man kan se av diffraktionen i linsen.



Då gäller Rayleighkriteriet:

$$\sin\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n\,D}$$

För små vinklar $\theta_{\min} < 20°$ gäller att $\sin\theta_{\min} \approx \frac{h_{\min}}{l} \approx \theta_{\min}$ i radianer.

Minsta upplösta objektavstånd (avstånd mellan två objekt) blir då:

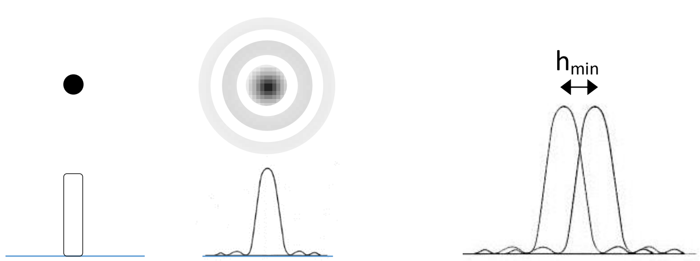
$$h_{\min} \approx \frac{1.22\lambda l}{n\,D}$$

Ett liknande uttryck kan ställas upp för minsta upplösta bildavstånd:

$$h'_{\min} \approx \frac{1.22\lambda l'}{n'\,D}$$

Punktspridningsfunktionen (psf)

En punkt avbildas inte till en punkt p.g.a. diffraktion i optiken. I stället ser vi en Airy Disk:



Vinkelförstoring

Vilkenförstoringen är kvoten mellan synvinkeln med synhjälpmedel och synvinkeln utan hjälpmedel.

$$M_\alpha = \frac{w_{\mathrm{med}}}{w_{\mathrm{utan}}}$$

Lupp

För en lupp gäller att vilkenförstoringen är en fjärdedel av linsens styrka

$$M_\alpha = \frac{F}{4}$$

Bländartal

Bländartalet är kvoten mellan fokallängd och aperturens diameter. Bländartalet betecknas:

$$f/\# = \frac{f}{D}$$

Om bländartalet är t.ex. 10 gäller att

$$f/10 = \frac{f}{D} = 10$$

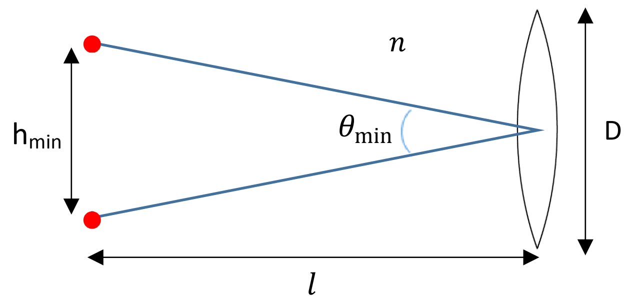
Belysning (repetition)

$$E_v = \frac{\Phi_v}{A}$$

46.) En TV-bild är uppbyggd av 625 horisontella linjer. På en 29” TV är bildrutan ca 42 cm hög. Hur långt från en sådan TV måste man sitta för att slippa se linjerna? Antag rimliga värden.

Metod: Det handlar om upplösning, så vi använder Rayleighkriteriet.

$$\sin\theta_{\text{min}} = \frac{1.22\lambda}{n\,D} \approx \frac{h_{\text{min}}}{l}$$



Givet: Bild med 625 linjer på 42 cm. Från detta kan vi få h_{min}

Sökt: Minsta betraktningsavstånd när linjerna inte kan upplösas, l.

Avståndet mellan linjerna

Det får plats 625 linjer på höjden 42 cm, avståndet mellan linjerna blir då

$$h_{\text{min}} = \frac{42}{625} = 0.067\ \text{cm}$$

Antag värden för ej givna parametrar

D är pupilldiametern hos personen som tittar på skärmen. Vi antar D = 3 mm.

Eftersom det handlar om synligt ljus antar vi som vanligt att $\lambda = 550\ \text{nm}$.

Det hela utspelar sig i luft, så $n = 1$.

Avståndet då vi precis kan särskilja linjerna

$$l \approx \frac{nDh_{\text{min}}}{1.22\lambda} = \frac{1\cdot 0.003\cdot 6.7\cdot 10^{-4}}{1.22\cdot 550\cdot 10^{-9}} = 3.0\ \text{m}$$

Vi kan precis särskilja linjerna på 3 m avstånd. Är vi längre bort ser vi inte skillnad på dem!

47.) Ögats upplösningsförmåga är begränsad. För att kunna urskilja små detaljer behöver vi olika synhjälpmedel. Beräkna den minsta styrka som en lupp måste ha för att vi skall kunna särskilja detaljer med 0.01 mm avstånd från varandra. Pupillens diameter är 2 mm. Systemet är aberrationsfritt.

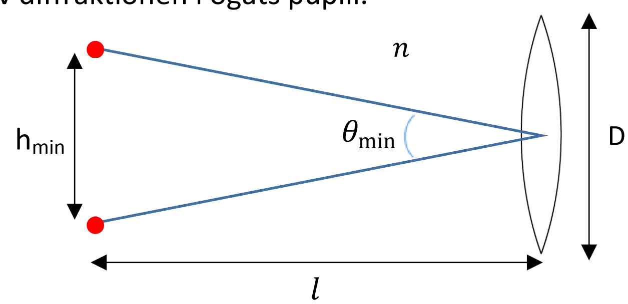
<u>Givet:</u> $h_{min} = 0.01$ mm, D = 2 mm

<u>Sökt:</u> Vilken styrka, F, måste en lupp ha för att vi ska kunna upplösa ett så litet h_{min}?

Upplösningskriteriet

Ögats upplösningsförmåga begränsas av diffraktionen i ögats pupill.

$$\sin\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n\,D} \approx \frac{h_{\min}}{l}$$

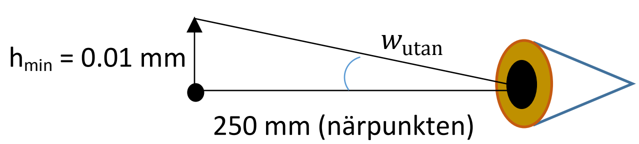


Med vårt vanliga antagande $\lambda = 550$ nm och med $n = 1$ får vi att den minsta vinkel som ögat kan upplösa är

$$\theta_{\min} \approx \sin\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n\,D} = \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0.33 \text{ mrad}$$

Synvinkel utan lupp

För att synvinkeln utan lupp, w_{utan}, ska bli så stor som möjligt (och vi ska ha en chans att upplösa små saker) vill man hålla föremålet så nära ögat som möjligt. Vi håller därför objektet i närpunkten.



$$w_{\text{utan}} \approx \frac{0.01}{250} = 0.04 \text{ mrad}$$

Utan lupp får vi en synvinkel på endast $w_{\text{utan}} = 0.04$ mrad. Det är mycket mindre än upplösningskriteriets minimigräns på $\theta_{\min} = 0.33$ mrad och vi kan därför inte särskilja punkterna.

Luppens förstoring och styrka

För en lupp ges vinkelförstoringen av: $M_\alpha = \frac{F}{4} = \frac{w_{\text{med}}}{w_{\text{utan}}}$

För att vi ska kunna särskilja punkterna måste synvinkeln med lupp vara åtminstone vad vi får av upplösnigsngsvilkoret, $w_{med} \geq \theta_{min}$. Sätter vi in $w_{med} = \theta_{min}$ får vi en förstoring på

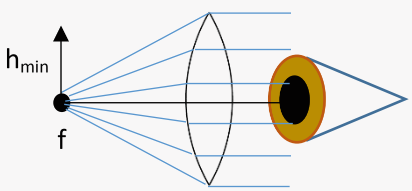
$$M_\alpha = \frac{F}{4} = \frac{w_{\text{med}}}{w_{\text{utan}}} = \frac{\theta_{min}}{w_{\text{utan}}} = \frac{0.33 \text{ mrad}}{0.04 \text{ mrad}} = 8.25$$

Om vi istället beräknar luppens styrka får vi

$$M_\alpha = \frac{F}{4} \rightarrow F = 4M_\alpha = 4 \cdot 8.25 = 33 \text{ D}$$

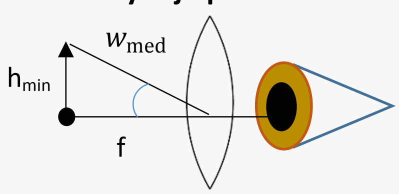
Extra om luppen: Härledning av $M_\alpha = \frac{F}{4}$

För att se objektet med avslappnat öga placeras det i luppens fokalplan så att bilden hamnar i oändligheten.



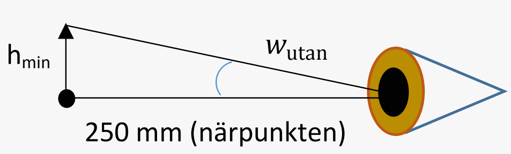
Vad blir vinkelförstoringen?

Med synhjälpmedel:



$$w_{\text{med}} = \frac{h_{\text{min}}}{f}$$

Utan synhjälpmedel:



$$w_{\text{utan}} = \frac{h_{\text{min}}}{0.250}$$

$$M_\alpha = \frac{w_{\text{med}}}{w_{\text{utan}}} = \frac{\frac{h_{\text{min}}}{f}}{\frac{h_{\text{min}}}{0.250}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{f} = \frac{F}{4}$$

48.) Ett diffraktionsbegränsat kameraobjektiv används för att avbilda en avlägsen stjärna (ett punktobjekt). Om bländartalet ändras från f/11 till f/5.5, med vilken faktor ändras då:

(a) bildstorleken (area)?

(b) ljusflödet som träffar filmen?

(c) belysningen på filmen?

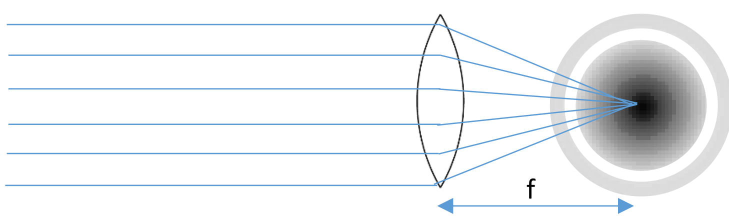
Vad är bländartal?

Kvoten mellan fokallängd och aperturens diameter. $f/\# = \frac{f}{D} = 11 \text{ resp. } 5.5$

Bländartalet halveras alltså, och eftersom fokallängden för linsen knappast ändras, är det aperturens diameter som har fördubblats.

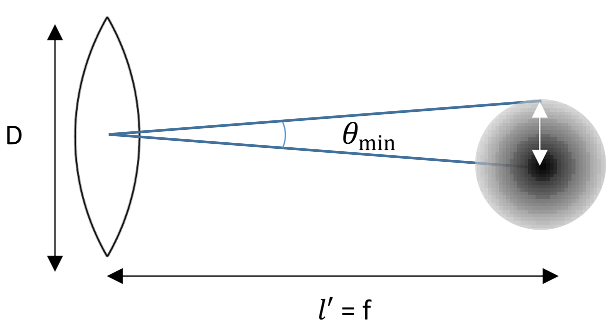
(a) Hur ändras bildstorleken?

När vi avbildar ett punktobjekt avgörs storleken på bilden av diffraktionen. Eftersom objektet är oändligt långt bort är inkommande strålar parallella och bilden hamnar i fokalplanet.



$r_{\text{Airy Disk}} = h'_{min}$

Hur stor är Airy Disk?



$r_{\text{Airy Disk}} = h'_{min}$

$$\sin\theta_{\text{min}} = \frac{1.22\lambda}{n'D} \approx \frac{r_{\text{Airy Disk}}}{f}, \qquad r_{\text{Airy Disk}} = \frac{1.22\lambda f}{n'D}$$

Om D fördubblas, halveras $r_{\text{Airy Disk}}$. Eftersom bildarean $A = \pi r_{\text{Airy Disk}}^2$ betyder en halvering av radien att arean minskar med en faktor 4.

(b) Hur ändras ljusflödet som träffar filmen?

När aperturens diameter fördubblas, blir dess area 4 gånger större. ($A \propto D^2$)

Det innebär att 4 gånger mer ljus kommer igenom systemet, till kamerans film.

(c) Hur ändras belysningen på filmen?

Belysning ges av ljusflöde per belyst area. Vi vet ju redan hur de har ändrats från (a) och (b)!

Bildens area har minskat från A_1 till $A_2 = A_1/4$. Flödet har ökat från $\Phi_{v,1}$ till $\Phi_{v,2} = 4\Phi_{\mathrm{v},1}$.

Från början hade vi:

$$E_{v,1} = \frac{\Phi_{v,1}}{A_1}$$

Efter förändringen har vi:

$$E_{v,2} = \frac{\Phi_{v,2}}{A_2} = \frac{4\Phi_{v,1}}{A_1/4} = 16E_{v,1}$$

Belysningen på filmen blir 16 gånger större.