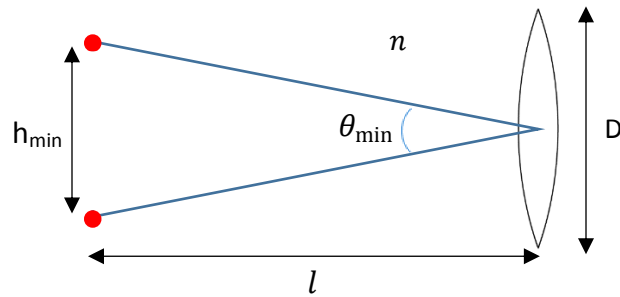


Övning 7 – Diffraction och upplösning

Diffraktionsbegränsade system

Om man tittar på ett objekt genom ett perfekt (aberrationsfritt) optiskt system avgörs hur små saker man kan se av diffractionen i linsen.



Då gäller Rayleighkriteriet:

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n D}$$

För små vinklar $\theta_{\min} < 20^\circ$ gäller att $\sin \theta_{\min} \approx \frac{h_{\min}}{l} \approx \theta_{\min}$ i radianer.

Minsta upplösta objektavstånd (avstånd mellan två objekt) blir då:

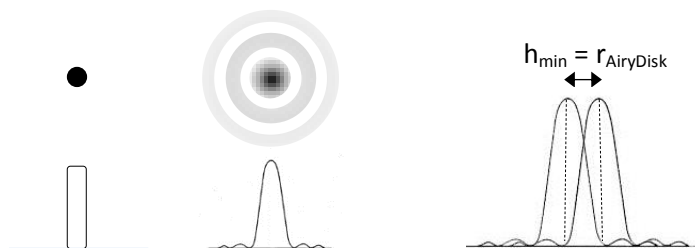
$$h_{\min} \approx \frac{1.22\lambda l}{n D}$$

Ett liknande uttryck kan ställas upp för minsta upplösta bildavstånd:

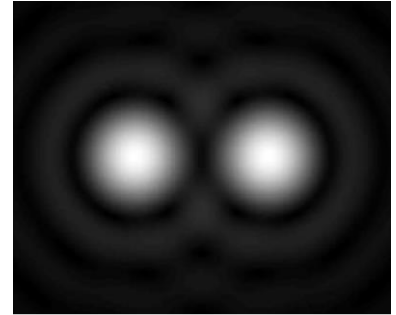
$$h'_{\min} \approx \frac{1.22\lambda l'}{n' D}$$

Punktspridningsfunktionen (psf)

En punkt avbildas inte till en punkt p.g.a. diffraction i optiken. I stället ser vi en Airy Disk:



39.) En optikerstudent håller ett litet hål med diametern 1.0 mm tätt intill ögat och tittar på två laserpunkter på en vägg 7 m bort. Hon ser mönstret i bilden till höger. Vilket avstånd är det mellan laserpunkterna på väggen?

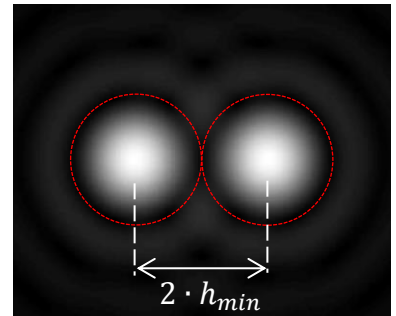


Givet: Mönstret i bilden. $D = 1.0 \text{ mm}$, $l = 7 \text{ m}$, $n = 1$ (luft).

Tolkning av vad studenten ser

Studenten ser två diffraktionsmönster (Airy Disks) p.g.a. diffraktionen i hålet som hålls framför ögonen.

I bilden till höger har man markerat de första mörka ringarna i diffraktionsmönstret med röda streckade linjer och vi ser att de precis nuddar varandra. Avståndet mellan laserpunkterna är alltså två gånger radien på en Airy Disk. Nu när vi vet detta kan vi precisera frågan till:



Sökt: Hur stor är radien på Airy Disk, d.v.s. vad är minsta upplösningbara avstånd, h_{\min} ?

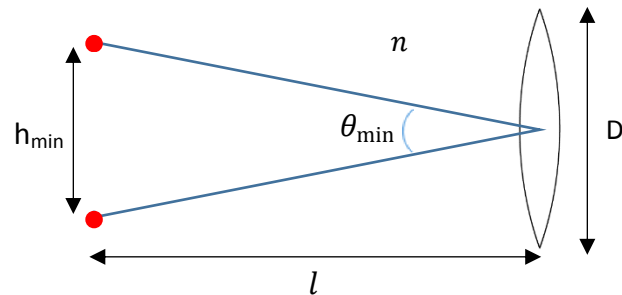
Svaret på den ursprungliga frågan är två gånger denna sträcka: $2 \cdot h_{\min}$

Upplösningskriteriet

Enligt Rayleighkriteriet har vi:

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{nD} \approx \frac{h_{\min}}{l}$$

Radien i Airy disk är alltså: $h_{\min} = \frac{1.22\lambda l}{nD}$



I uppgiften har vi fått att $l = 7 \text{ m}$, $D = 1 \text{ mm}$, $n = 1$ (luft), men vad är våglängden?

Regel: Om inget annat anges i uppgiften, antag grönt ljus $\lambda = 550 \text{ nm}$.

$$h_{\min} = \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 7}{1 \cdot 0.001} = 0.0047 \text{ m} = 4.7 \text{ mm}$$

Avståndet mellan punkterna på väggen är två radier alltså: $2h_{\min} = 9.4 \text{ mm}$

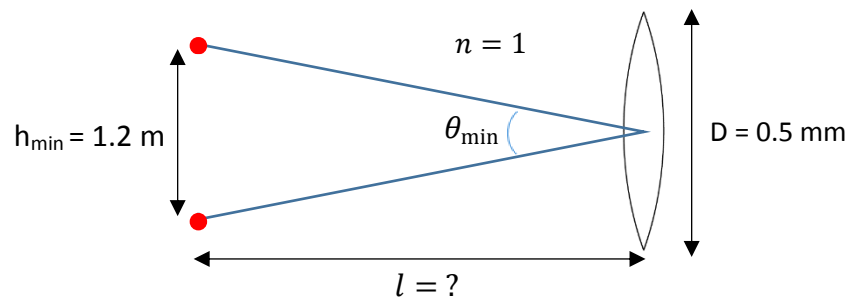
40.) På vilket avstånd från en mötande bil kan man i mörker urskilja att den har två strålkastare (dvs. se skillnad på bil och motorcykel) om man håller ett litet hål med $D = 0.5 \text{ mm}$ tätt intill ögat? Strålkastarna på den mötande bilen sitter 1.2 m från varandra

Givet: Diffraktionsbegränsad upplösning. $D = 0.5 \text{ mm}$ och $h_{\min} = 1.2 \text{ m}$

Sökt: Vad är avståndet, l , till objektet (bilen)?

Använd upplösningskriteriet

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{nD} \approx \frac{h_{\min}}{l}$$



Precis som i förra problemet har vi inte fått veta våglängden. Vi antar därför $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Avståndet då vi precis kan särskilja strålkastarna är då:

$$l \approx \frac{nDh_{\min}}{1.22\lambda} = \frac{1 \cdot 0.0005 \cdot 1.2}{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}} = 900 \text{ m}$$

Vi kan särskilja strålkastarna på 900 m avstånd! Är vi längre bort ser de ut som en ensam ljuspunkt.

42.) En person som tittar på en bildskärm har en pupill med $D = 1.5 \text{ mm}$ och perfekt syn (Diffractionen begränsar). Hur långt ifrån skärmen måste hon sitta för att hon inte ska särskilja pixlarna? Skärmen har 1280×1024 pixlar och är $320 \text{ mm} \times 256 \text{ mm}$ stor. Räkna med grönt ljus, 550 nm . Betrakta pixlarna som punktkällor.

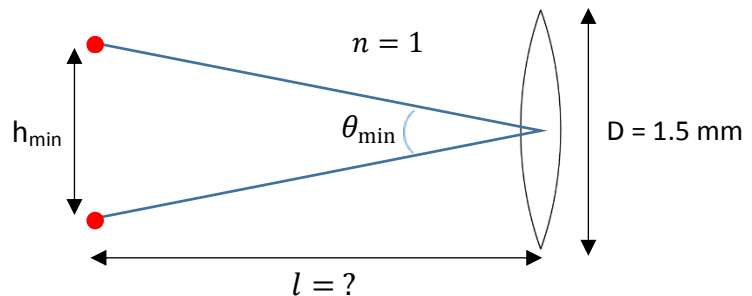
Givet: Bildskärm med storlek $320 \text{ mm} \times 256 \text{ mm}$ och upplösning 1280×1024 pixlar.

Betraktas av person med pupilldiameter $D = 1.5 \text{ mm}$ och perfekt syn.

Sökt: Minsta avstånd där hon inte längre kan upplösa pixlarna på skärmen. $l = ?$

Upplösningskriteriet

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{nD} \approx \frac{h_{\min}}{l}$$



Avståndet mellan pixlarna, h_{\min}

Vi känner till våglängd, aperturstorlek och brytningsindex från uppgiften, men vad är h_{\min} ?

När hon precis kan särskilja pixlarna är minsta upplösta avstånd pixelavståndet. Avståndet mellan pixlarna kan vi räkna ut från skärmens storlek och antal pixlar.

Vi har 1024 pixlar fördelade över höjden 256 mm:

$$h_{\min} = \frac{256}{1024} = 0.25 \text{ mm}$$

(Det blir samma sak om vi räknar på bredden istället: $320 / 1280 = 0.25 \text{ mm}$)

Minsta avstånd där pixlarna kan urskiljas

Sätter vi in våra värden i upplösningvillkoret får vi ett avstånd på:

$$l \approx \frac{nDh_{\min}}{1.22\lambda} = \frac{1 \cdot 0.0015 \cdot 0.00025}{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}} = 0.56 \text{ m}$$

Sitter hon längre bort än 56 cm så kan hon inte se enskilda pixlar. Det borde ju vara lugnt.

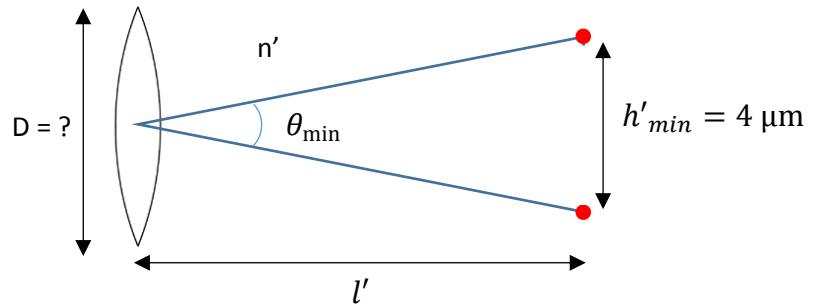
43.) Tappavståndet på näthinnan avgör hur små detaljer man kan se. Receptorkriteriet lyder: "Två punkter kan precis särskiljas om bilderna av punkterna på näthinnan är $4 \mu\text{m}$ ifrån varandra." (Detta motsvarar 2 gånger tappavståndet.) Vilken storlek måste pupillen minst ha för att vi skulle kunna se så bra som receptorkriteriet antyder?

Givet: Diffraktionsbegränsat fall med $h'_{\min} = 4 \mu\text{m}$

Sökt: Öppningens (pupillens) diameter, D .

Upplösningsskriteriet (innuti ögat, på bildsidan)

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n'D} \approx \frac{h'_{\min}}{l'}$$



Ögats egenskaper

Förutom h'_{\min} finns det flera parametrar som inte anges i uppgiften. Dessa tar vi från en enkel ögonmodell:

Brytningsindex är ungefär samma som i vatten: $n' = 1.333$

Avståndet l' är avståndet från pupill till näthinna: $l' = 22 \text{ mm}$

Pupillens storlek, D

Vi använder upplösningsskriteriet för att bestämma det värde på D som ger upplösningen $h'_{\min} = 4 \mu\text{m}$.

Återigen vet vi inte vad våglängden är. Antag därför $\lambda = 550 \text{ nm}$ som vanligt.

$$D \approx \frac{1.22 \lambda l'}{n' h'_{\min}} = \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 0.022}{1.333 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 0.0028 \text{ m}$$

Om pupillen är större än 2.8 mm är det tappavståndet som begränsar synen. Om pupillen är mindre än 2.8 mm begränsas synen istället av diffractionen/upplösningsskriteriet.

45.) Falkar är berömda för att se bra. Hur små saker kan de rimligtvis se om de flyger på 400 m höjd? Enbart storleksordning (mm?, μm ?, cm?) efterfrågas och du får göra de (rimliga) antaganden du vill.

Givet: Diffraktionsbegränsad syn med avståndet $l = 400$ m.

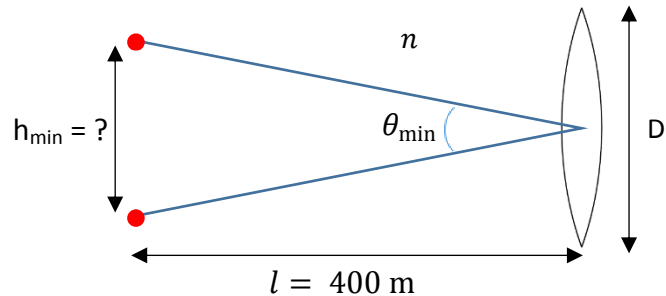
Sökt: Maximal upplösning, h_{\min}

Upplösningskriteriet

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{nD} \approx \frac{h_{\min}}{l}$$

Minsta upplösta avståndet ges av:

$$h_{\min} = \frac{1.22 \lambda l}{n D}$$



Värden för de ej angivna parametrarna

Det är bara avståndet 400 m som är givet i talet. Övriga värden måste vi själva göra rimliga antaganden om.

Brytningsindex är lätt, det är luft! $n = 1$

Alltid när våglängden är okänd (och det handlar om synligt ljus) kan vi anta $\lambda = 550$ nm.

Det klurigaste är falkens pupill, D . Vi ser i upplösningskriteriet ovan att stor pupill ger bättre upplösning, vi väljer därför ett så stort värde som möjligt, men som fortfarande är rimligt.

- Millimeterstor pupill? Inga problem!
- Centimeterstor pupill? Kan nog fortfarande gå...
- Decimeterstor pupill? Nej, så stora ögon har falkar definitivt inte!

Vi tar $D = 1$ cm.

Bästa möjliga upplösning

$$h_{\min} = \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 400}{1 \cdot 0.01} = 0.027 \text{ m} \approx 1 \text{ cm}$$

Falken kan se saker som är enstaka cm stora när den flyger på 400 m höjd.