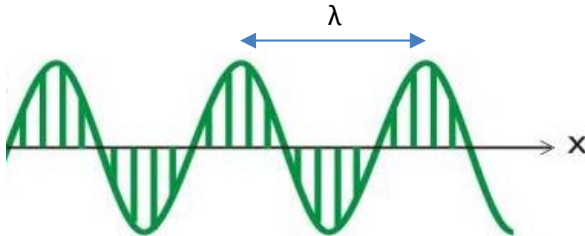


Föreläsning 14 och 15: Diffraction och interferens i gitter, vanliga linser, diffraktiv optik och holografi

Ljusets vågnatur

Ljus är elektromagnetiska vågor som rör sig framåt. När vi ritar strålar så visar de åt vilket håll vågorna rör sig:



$$y = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \delta\right)$$

λ = ljusets våglängd (färg), mäts ofta i nanometer = 10^{-9} m (synligt ca 400-700 nm)

$\nu = 1/T$ = ljusets frekvens, mäts i Hertz = 1/sekund

$c = \lambda \nu$ = ljusets hastighet, i vacuum och luft är hastigheten 300 000 km/s

$E_e \sim a^2$, amplituden i kvadrat är proportionell mot ljusets irradians [W/m^2] ofta kallad ljusets "intensitet", I

Vågfronter är tänkta linjer som binder samman ljus med samma fas, t.ex. topp med motsvarande topp. Från en punktkälla ser vågfronterna ut som ringarna när man kastar en sten i vattnet.

Ljusets vågnatur kan ge upphov till två fenomen, interferens och diffraction, som utnyttjas vid t.ex. antireflex-behandlingar och multifokala intraokulära linser.

Interferens

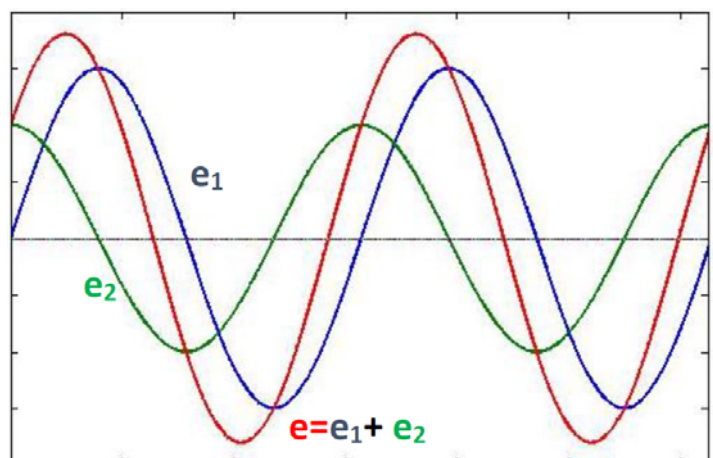
Superposition = att lägga samman ljus.

Konstruktiv interferens:

Topp + Topp & Dal + Dal = mkt ljus

Destruktiv interferens:

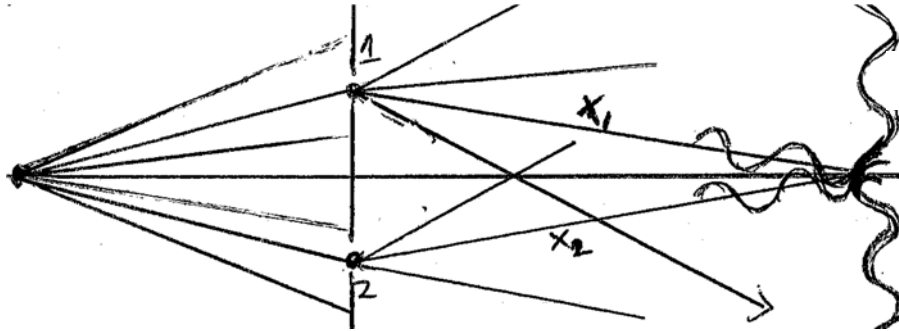
Topp + Dal & Dal + Topp = inget ljus



För att interferens ska kunna ske måste ljuset ska vara koherent, d.v.s. med samma våglängd och konstant fasskillnad.

Det innebär att ljuset måste komma från **samma ljuskälla**

Trick: Skapa två punktkällor genom att belysa en skärm med två spalter => Youngs dubbelspalt (ett annat exempel är antireflex-skikt):



I interferensmönstret är $I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$

med fasskillnad $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n' \cdot \Delta x + \text{ev. extra fasskillnad}$

På olika höjder i interferensmönstret är skillnaden i optisk väg $n' \Delta x = n'(x_1 - x_2)$ för ljuset från öppning 1 och 2 olika, vilket ger en varierande fasskillnad.

Konstruktiv interferens:

$$\Delta\phi = 2\pi m, m = \text{heltal: } 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$$

Destruktiv interferens:

$$\Delta\phi = \pi m, m = \text{udda heltal: } \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$$

För att interferens ska uppstå **måste dessutom ljusets koherenslängd vara längre än vägskillnaden.**

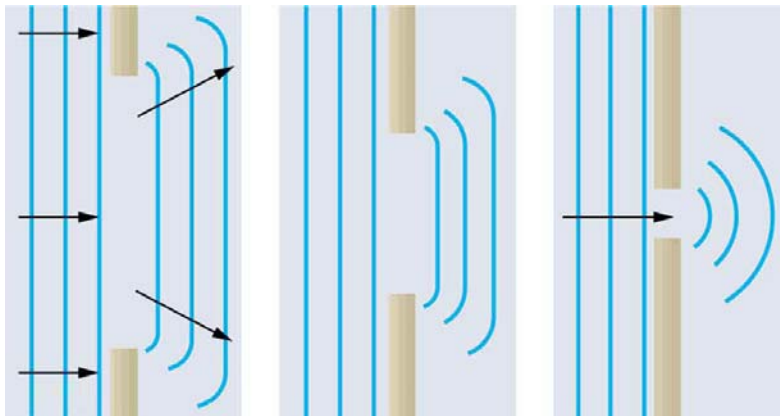
Diffraktion

Vågor böjer av när de passerar avgränsande aperturer (öppningar) eller kanter.

Naturen kan inte ha en våg som slutar abrupt, istället sker en långsammare "utslätning" av vågfronten vid kanten av en öppning, vilket gör att ljuset "böjs av" vid skarpa kanter. Fenomenet kallas för diffraction och kan även ses för vågor på vatten (google-earth bilden bredvid är från iopscience.iop.org).



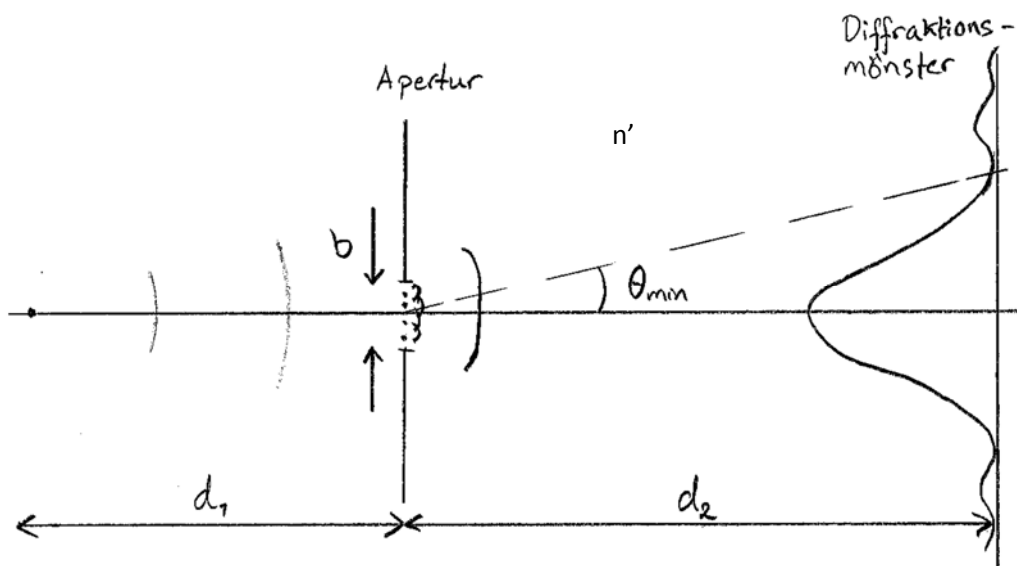
Eftersom ljuset böjs av vid kanterna blir diffraktionen större ju mindre hålet är (bild från cnx.org):



Utan diffraktion hade vi fått en perfekt skuggbild.

Fraunhofer diffraktion

Enligt Huygens princip kan vi betrakta varje del på vågfronten i öppningen som en ny punktkälla och summera ihop (interferens) bidragen från alla punkter för att få fram diffraktionsmönstret:



Bilden ovan visar fraunhoferdiffraktion vilket förutsätter att d_1 och d_2 är mycket större än öppningens diameter b och ljusets våglängd λ (egentligen d_1 och $d_2 \gg b^2/\lambda$). Fraunhofer diffraktion får man alltså när det är stort avstånd till både ljuskällan och där diffraktionsmönstret hamnar (plana vågor). När man avbildar punktkällan på skärmen med en lens får man också fraunhoferdiffraktion (se sid. 62).

- Cirkulärt hål ger en Airy disk:

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1,22\lambda}{n'b}$$

där vinkeln θ_{\min} är vinkeln bort till första mörka ringen

84% av ljuset finns i Airy diskens centrala fläck.



- En spalt ger ett randmönster:

$$\sin \theta_{\min, m} = \frac{\lambda}{n' b} \cdot m$$

där m är ordningen på minimet (heltal)



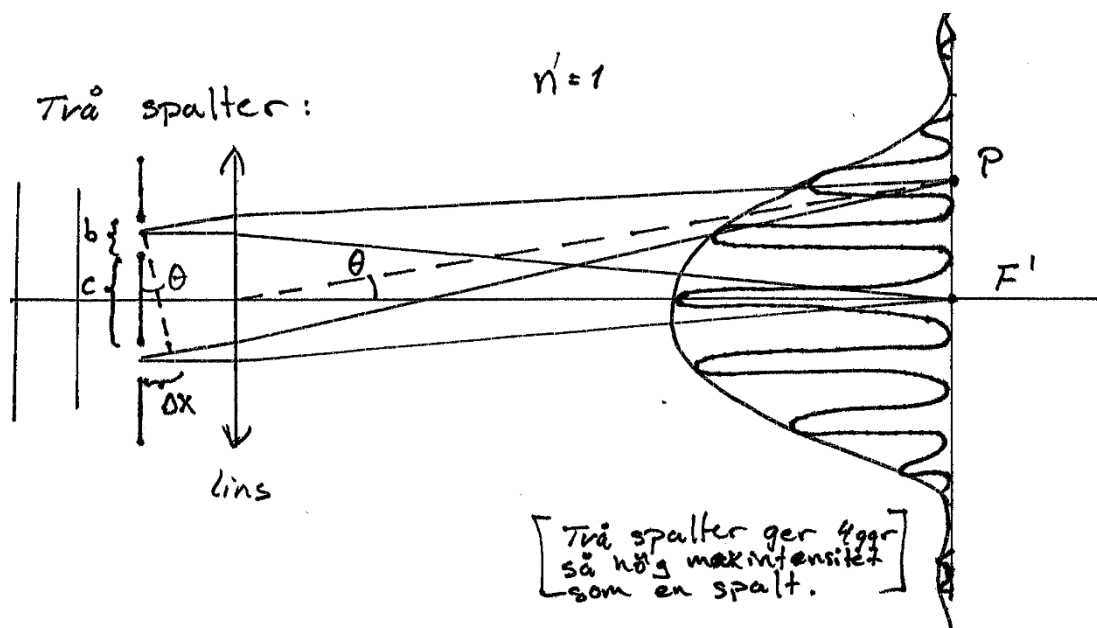
Diffractionen ökar när hålet/spalten blir mindre och när λ blir större!

Gitter

Figuren med Youngs dubbelspalt var inte riktigt komplett...

Med två smala spalter får vi **både interferens och diffraction!**

Mönstret blir ett interferensmönster vars intensitet bestäms av diffractionsmönstret från spalterna (spalterna är lika breda och ger därför samma mönster), alltså blir inte alla interferensmax lika starka.



Skillnaden i optisk väg för punkten P blir:

$$OPD = n' \cdot \Delta x = n' \cdot (b + c) \sin \theta$$

$$\Rightarrow \Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n' \cdot (b + c) \sin \theta$$

Konstruktiv interferens vid interferensmaximum när: $\Delta \phi = m \cdot 2\pi \Rightarrow$

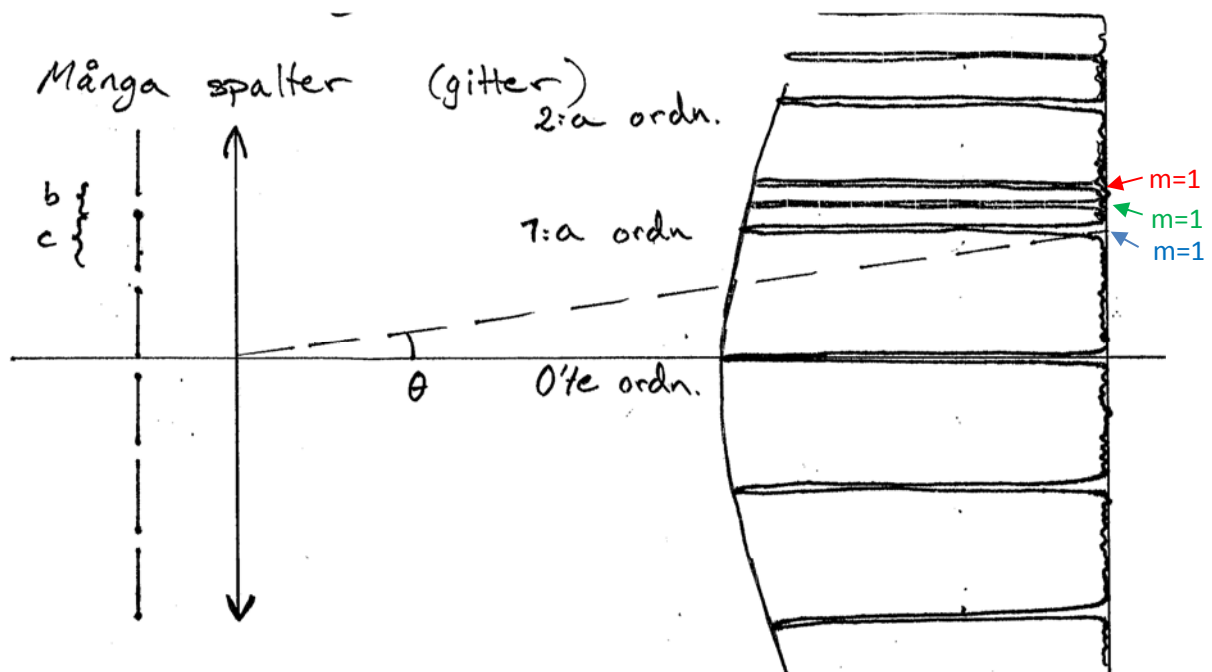
$$\boxed{\sin \theta_{\max} = m \cdot \frac{\lambda}{n' \cdot (b + c)}} \quad \text{med } m = \text{heltal } (0, \pm 1, \pm 2, \pm 3) \quad (\text{Denna formel kallas gitterekvationen})$$

Dessutom mörkt vid diffractionsminimum:

$$\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{n' b} \cdot m \quad \text{med } m = \text{heltal } (\pm 1, \pm 2)$$

Gitter = många spalter regelbundet fördelade

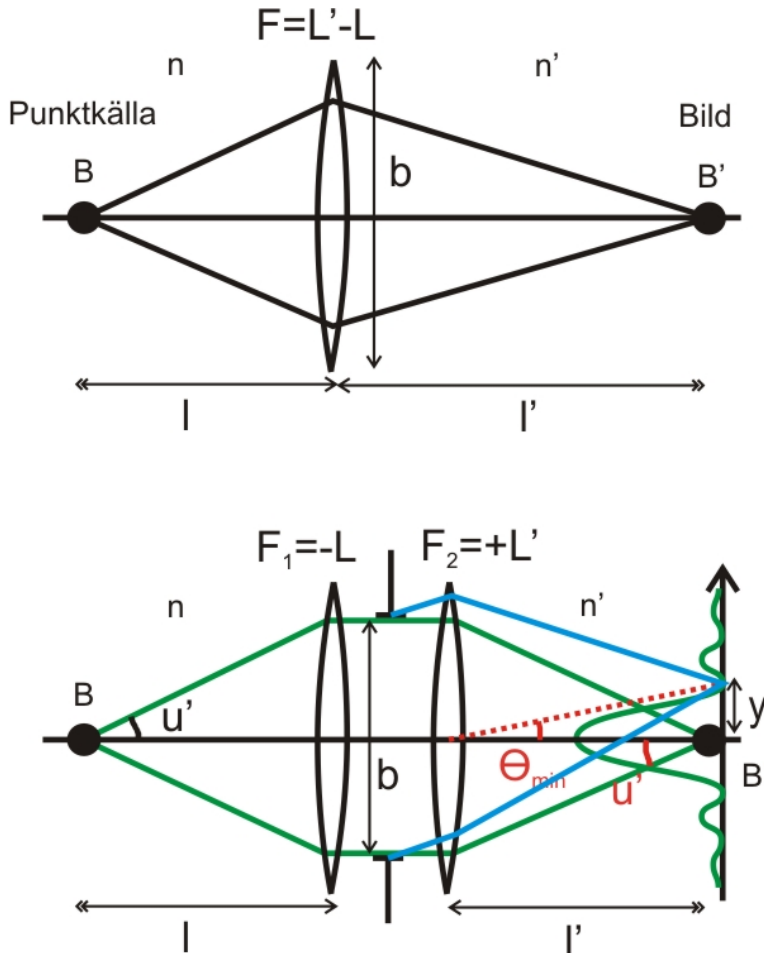
- Samma diffraktionsmönster som från dubbelspalt
- Mycket smala interferensmaximum
- Tätare gitter (fler spalter/mm, $b+c$ mindre) ger större vinkel mellan olika ordningars interferensmax
- Smalare spalter (b mindre) ger bredare diffraktionsmönster => interferensmaximum för fler ordningar syns.
- Olika våglängder får sina interferenstoppar i olika vinklar
- Negativ dispersion = Rött bryts mer än blått



Diffraction i avbildande system - upplösning

Fraunhofer diffraction är även den typ av diffraction som fås när ljuset från en objektpunkt samlats till en bild av en lins. Diffractionen i en cirkulär lins blir på samma sätt som i ett runt hål, d.v.s. en Airy disk.

BEVIS: Vi kan tänka oss att linsen nedan, som gör en avbildning, delas upp i två linser: en som kollimerar ljuset, och en som sedan fokuserar det (såsom visas i den nedre bilden).



Vi tänker oss att aperturstoppet ligger mellan dessa båda linser, och då kan vi räkna ut hur stor vinkeln θ_{\min} blir pga diffraction:

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1,22\lambda}{n'b}$$

Då kan vi också räkna ut hur stor bilden av en punkt blir, pga diffraction:

$$y \approx l' \sin \theta_{\min} = \frac{1,22\lambda l'}{n'b}$$

där y är radien på den suddiga fläcken. Geometrin $b \approx 2l \sin u \approx 2l' \sin u'$ ger även att:

$$y \approx l' \sin \theta_{\min} = \frac{1,22\lambda l'}{n'b} \approx \frac{0,61\lambda}{n' \sin u'} \approx \frac{0,61\lambda}{NA'} \approx \frac{0,61\lambda}{n \sin u} \cdot \frac{n l'}{n l} \approx \frac{0,61\lambda}{NA} \cdot m$$

I system med flera linser ges bildens suddighet av diffraktionen beräknad i den öppning/lins som är aperturstopp. Diffraktionen ger en suddighet i bilden och är den yttersta gränsen för hur skarp en bild kan bli vid en viss storlek på aperturen. **Diffraktionsbegränsad** betyder att suddigheten från aberrationerna är mindre än suddigheten från diffraktion – svårare att åstadkomma ju större linsens öppning görs.

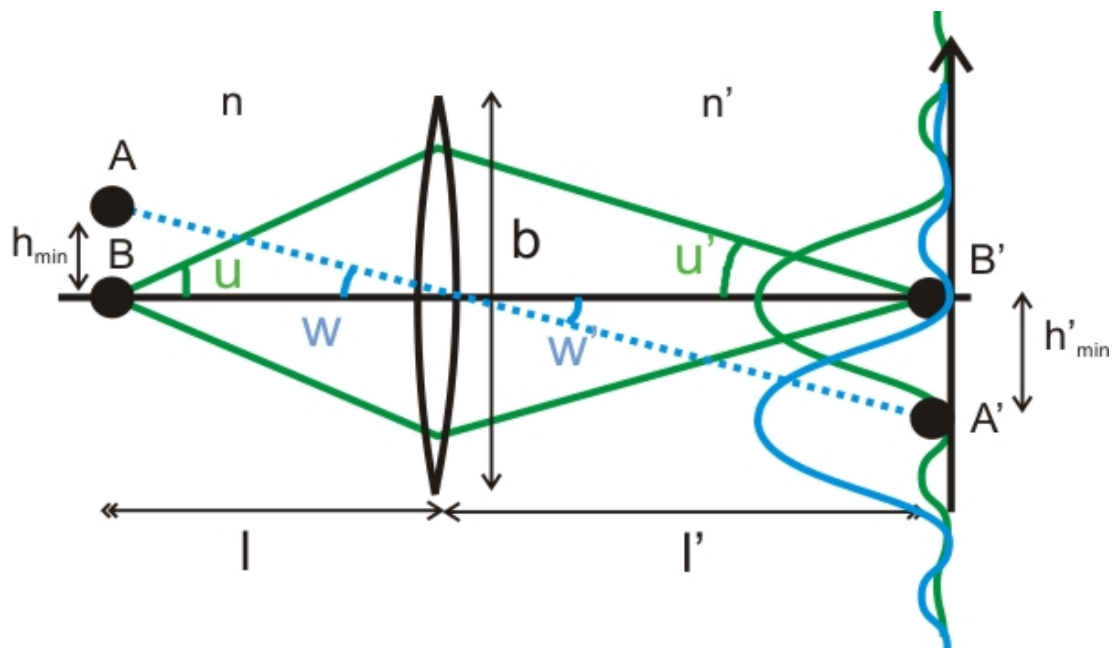
- Stor apertur (AS) ger stora aberrationer (möjliga att minska) och liten diffraktion
- Liten apertur (AS) ger små aberrationer och stor diffraktion (kan inte minskas)

Ett mått på hur bra bildkvalitet ett optiskt system ger är dess **upplösning**, d.v.s. förmågan att särskilja två punkter som befinner sig nära varandra. Gränsen för upplösning beror på hur stor den suddiga fläcken blir p.g.a. aberrationer och diffraktion.

- Suddigheten p.g.a. aberrationer kan beräknas från ekvationer, genom att titta på punktspridningsfunktionen (PSF), eller tas utifrån gränsfrekvensen i modulationsöverföringsfunktionen (MTF-kurvan).
- Suddigheten från diffraktion i en cirkulär lins ges av Airydiskens storlek.

Upplösningskriterium = hur nära kan två suddiga fläckarna vara varandra och ändå ses som två olika?

Det beror på... Ett vanligt kriterium är **Rayleighkriteriet** (gäller för diffraktionsbegränsade bilder):



Vid diffraktion ges minsta upplösta w , w' , h eller h' av:

$$w' = \frac{1,22\lambda}{n'b} \quad (\text{vinkel i radianer}) \qquad w = \frac{n'}{n} w' = \frac{1,22\lambda}{nb} \quad (\text{brytningslagen})$$

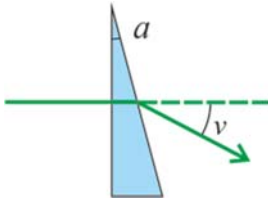
$$\boxed{h'_{min} = \frac{1,22\lambda l'}{n'b}} = \frac{0,61\lambda}{NA'} = \frac{0,61\lambda}{NA} m$$

$$h_{min} = \frac{h'_{min}}{m} = \frac{1,22\lambda l}{nb} = \frac{0,61\lambda}{n \sin u} = \frac{0,61\lambda}{NA}$$

Diffaktiv optik

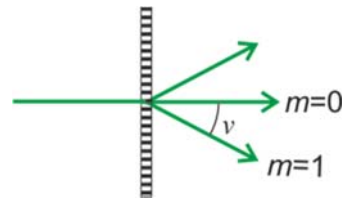
Diffraktiva prismor

Ett gitter kan användas istället för prisma för att bryta ljuset och dela upp det i våglängder:



Avbøjningsvinkel i prisma: $v = (n - 1)a$

$$\text{Ger abbetal: } V = \frac{v_d}{(v_F - v_C)} \approx 60$$



Avbøjningsvinkel i gitter: $v = \lambda / (b + c)$

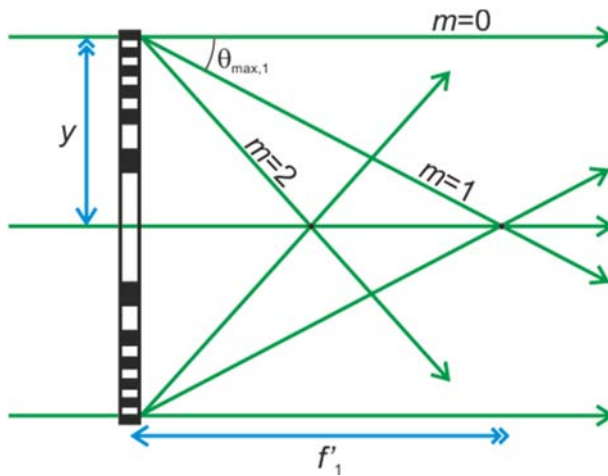
$$\text{Ger abbetal: } V = \frac{v_d}{(v_F - v_C)} = \frac{\lambda_d}{(\lambda_F - \lambda_C)} \approx -3,5$$

Om ett gitter används som prisma för avbildning (exempelvis för att titta igenom) får man alltså stor kromatisk aberration där rött bryter mer än blått.

Diffraktiva linser

Om man radiellt sätter samman flera prismor med olika toppvinkel kan man få en funktion som liknar en vanlig lins (jämför fresnellinser). På samma sätt kan man sätta samman flera cirkulära gitter med olika täthet (linjer/mm) till en diffaktiv lins.

Diffaktiv lins = cirkulära gitter med varierande täthet som fungerar som linser.



De olika ordningarna (m) har olika långa fokallängder och därmed olika styrkor ($m=0$, bryts ej):

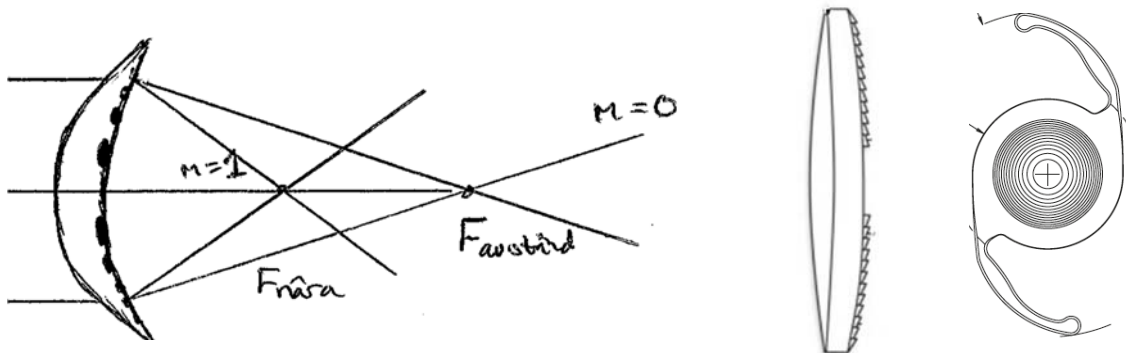
$$\tan \theta_{\max, m} = \frac{y}{f'_m} \approx \theta_{\max, m} \approx \sin \theta_{\max, m} = m \cdot \frac{\lambda}{n' \cdot (b + c)}$$

$$\Rightarrow F_m = \frac{n'}{f'_m} = m \cdot \frac{\lambda}{y \cdot (b + c)}$$

Diffaktiv optik har omvänd kromatisk aberration (rött bryts mer än blått) motsvarande ett abbetal på ca. -3,5.

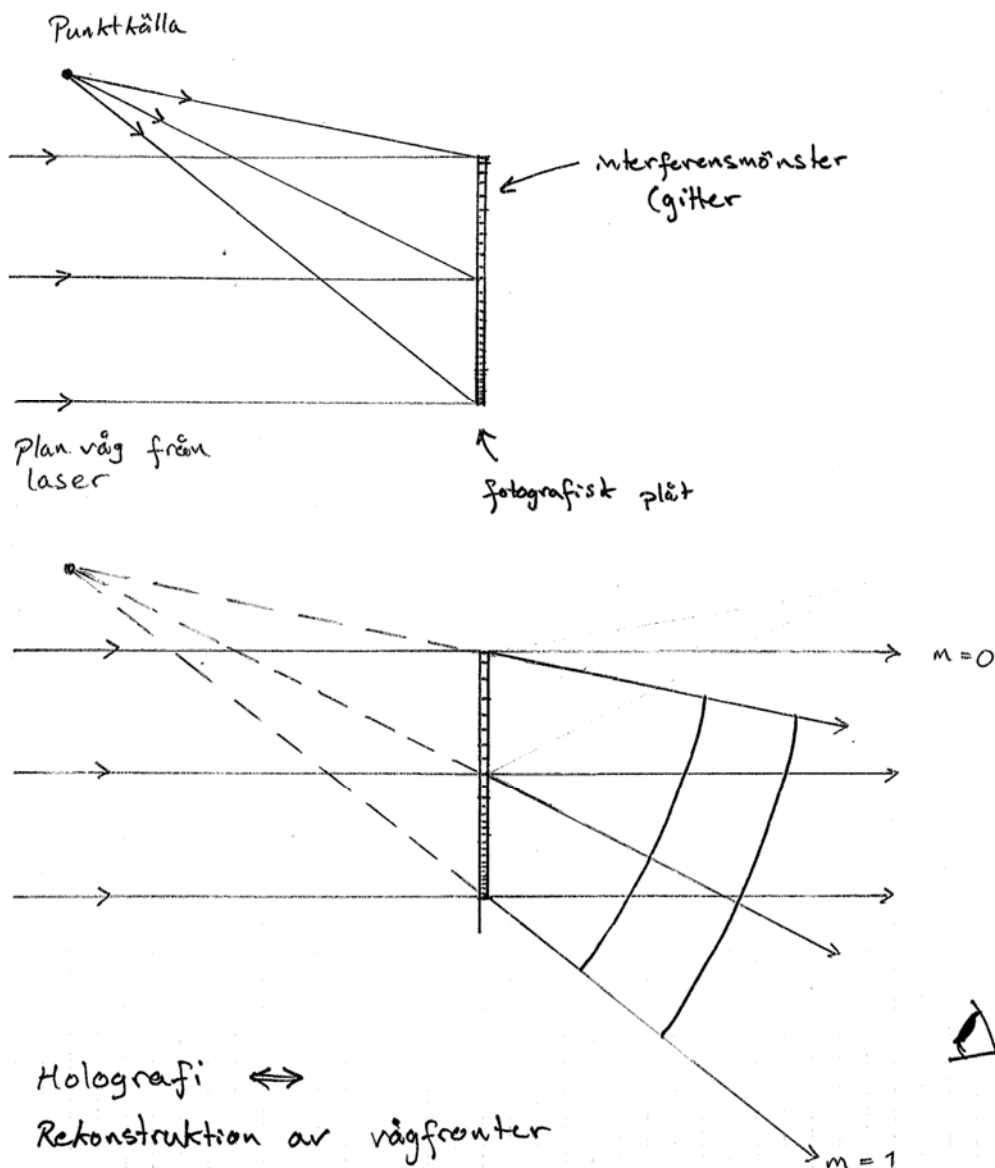
Att kombinera en vanlig lins med diffraktiv optik (i t.ex. en kontaktlins eller en intraokulär lins) ger fördelar:

- Multifokalitet
- Reducerad kromatisk aberration



Holografi

Att återskapa vågfronten från ett objekt (punktkällan i figuren nedan) – ger tredimensionella bilder vid korrekt belysning!



Holografi \Leftrightarrow
Rekonstruktion av vågfronten