Intromatte för optikerutbildningen
Daniel Larsson, 2013

Trigonometri

Syftet med det här dokumentet är dels att repetera och fördjupa koncept inom trigonometri som hör till Matematik 1 (förr Matematik A) på gymnasiet, dels att ge en introduktion till nya saker som enhetscirkeln, omvandling mellan grader och radianer, den så kallade småvinkelapproximationen, samt hur man ritar upp trigonometriska funktioner.

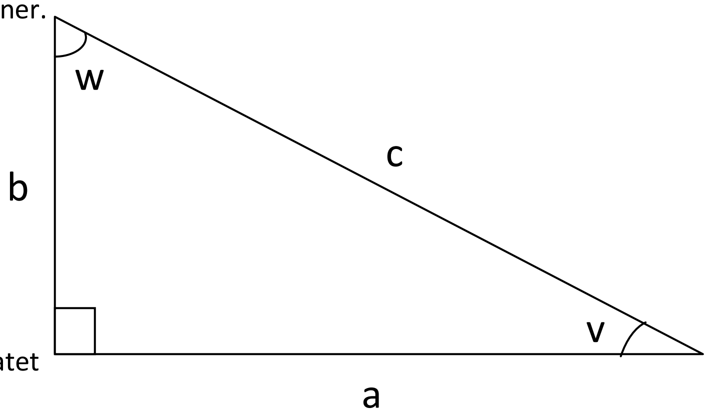
Trigonometriska funktioner

I en rätvinklig triangel gäller, för vinkeln *v*:

$\sin v = \frac{b}{c}$ motstående katet/hypotenusan

$\cos v = \frac{a}{c}$ närliggande katet/hypotenusan

$\tan v = \frac{b}{a}$ motstående katet/närliggande katet



Sinus, cosinus och tangens är så kallade trigonometriska funktioner. Eftersom vi kommer träffa på många rätvinkliga trianglar när vi ritar ljusstrålar etc. så är de ofta användbara. Kom ihåg att motsvarande samband gäller för vinkeln *w*, dvs. $\sin w = \frac{a}{c}$ osv.

Grader och radianer

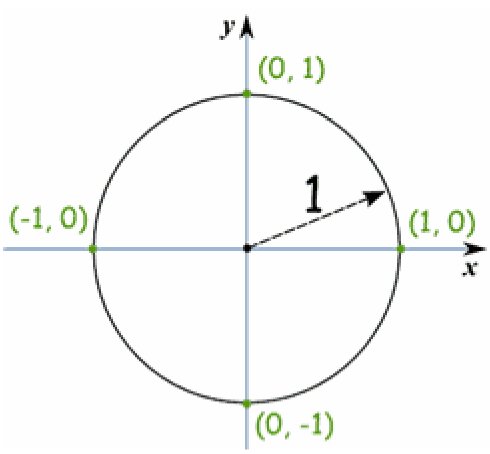
Vinklar kan (bland annat) mätas i grader eller radianer. Vi behöver kunna omvandla mellan dessa enheter. Ett helt varv (i en cirkel) motsvarar 360°, vilket är 2π radianer (skrivs ibland ”rad”, eller utan enhet). Detta innebär att sambandet mellan grader och radianer är:

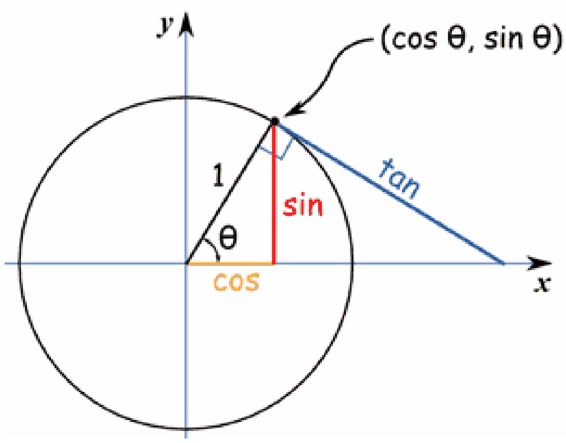
$$\boxed{vinkeln\ i\ grader = vinkeln\ i\ radianer \cdot \frac{180}{\pi}}$$

Tänk på att ha miniräknaren inställd rätt! Som regel kan den vara inställd på att räkna i grader (och inte i radianer). På TI-83:or och liknande trycker man på MODE-knappen och ändrar till ”Degree”.

Enhetscirkeln – ett praktiskt hjälpmedel

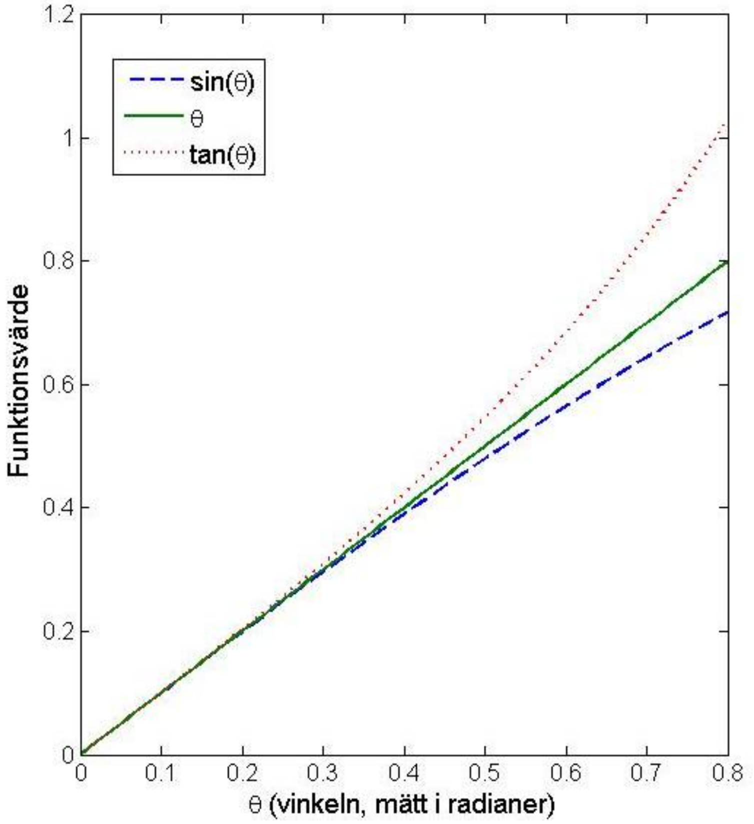
Enhetscirkeln är helt enkelt en cirkel med radien 1, med mittpunkt i origo. Den är praktisk för att se vilka värden de trigonometriska funktionerna har för olika vinklar. I figuren nedan till höger så kan man se att varje vinkel (här kallad θ, ”theta”) motsvarar en viss punkt på cirkeln. Den här punktens x-koordinat är $\cos\theta$ och dess y-koordinat $\sin\theta$. Eftersom man vet att radien på cirkeln är 1, så kan man t.ex. se att sinus för 90° (eller π/2 rad) är 1 och att cosinus för 180° (π rad) är -1.





Småvinkelapproximationen

Titta i figuren nedan. För små vinklar är tydligen $\boldsymbol{\sin\theta \approx \theta}$**, om <u>vinkeln mäts i radianer</u>**. Detta faktum är användbart och förenklar olika formler. Till exempel blir $\sin v = \frac{b}{c}$ nu bara $v = \frac{b}{c}$, vilket är ett enklare uttryck. Dessutom gäller att $\boldsymbol{\tan\theta \approx \theta}$ (och $\cos\theta \approx 1$), för små vinklar.

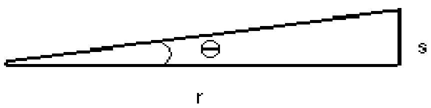


Vad som räknas som en "liten" vinkel beror förstås på hur stort fel man kan tillåta sig, men generellt kan vi säga att för vinklar mindre än 20° (dvs. 0.35 radianer), är småvinkelapproximationen helt OK att göra. Men, vi måste komma ihåg följande:

Om man vill använda småvinkelapproximationen ($\sin\theta \approx \theta$ *eller* $\tan\theta \approx \theta$*), så <u>måste vinkeln anges i radianer!</u>*

Exempel:

I en rätvinklig triangel är vinkeln θ = 8° och motstående katet s 1 cm lång. Bestäm längden av närliggande katet r, dels utan och dels med hjälp av småvinkelapproximationen!



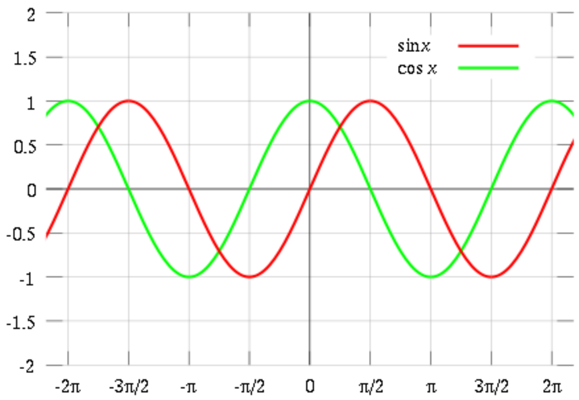
Vi har att $\tan 8° = \frac{1\text{ cm}}{r}$, så $r = \frac{1\text{ cm}}{\tan 8°} = 7.115\ldots\text{cm} \approx 7.1$ cm. Eftersom vinkeln är liten, så kan vi även räkna om vinkeln till radianer och approximera uttrycket: $8 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1\text{ cm}}{r}$, så $r = \frac{1}{8} \cdot \frac{180}{\pi}\text{ cm} = 7.162\ldots\text{cm} \approx 7.2$ cm.

<u>Svar:</u> r = 7.1 cm (utan approx.), r = 7.2 cm (med småvinkelapproximationen).

Som synes blir svaren väldigt lika.

Sinuskurvor

Om man tittar i enhetscirkeln så kan man se att de trigonometriska funktionerna är periodiska: om du ökar en vinkel med 360° så kommer du tillbaka till samma punkt på cirkeln, alltså är t.ex. $\sin 20° = \sin(20° + 360°)$, dvs. perioden är 360˚ (eller 2π) i detta fall. I figuren nedan har vi en sinuskurva och en cosinuskurva. Jämför gärna funktionernas värden för olika vinklar med vad enhetscirkeln säger!



En allmän sinusfunktion $y(\theta) = A\sin(b(\theta + c)) + d$ har fyra konstanter: *A*, *b, c* och *d* som avgör kurvans utseende.

- Amplituden (*A*) bestämmer kurvans ”höjd”: det är halva avståndet från vågtopp till vågdal.
- Parametern *b* ändrar perioden, dvs. hur tätt vågtopparna ligger i sidled (tänk våglängd). Perioden är 2π om *b* = 1.
- *c* är fasförskjutningen, som styr hur kurvan är förskjuten i sidled.
- Parametern *d* flyttar hela kurvan i höjdled.

I det enklaste fallet är *A* = *b* = 1 och *c* = *d* = 0, vilket är fallet både i enhetscirkeln (eller hur?) och i figuren ovan. Här kommer några exempel på olika kurvors utseende, för olika värden på *A*, *b, c* och *d*:

- *A* = 0.5, *b* = 1, *c* = *d* = 0. Kurvan $0.5\sin\theta$ kommer se ut som sinuskurvan i figuren, men ha hälften så stor amplitud (dvs. variera mellan +0.5 och -0.5).
- *A* = 1, *b* = 2, *c* = *d* = 0. Kurvan $\sin 2\theta$ har hälften så lång period som $\sin\theta$, π istället för 2π, och kommer att ”svänga” dubbelt så snabbt som $\sin\theta$. Den når alltså sitt första maximum vid $\frac{\pi}{4}$ istället för vid $\frac{\pi}{2}$.
- *A* = *b* = 1, *c* = $\frac{\pi}{2}$, *d* = 0. En sinuskurva med ekvationen $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ kommer vara förskjuten i sidled 90° ($\frac{\pi}{2}$ radianer) åt vänster och därför se ut exakt som cosinuskurvan i figuren ovan.
- *A* = 5, *b* = 1, *c* = 0, *d* = 3. Kurvan $y = 5\sin\theta + 3$ är förskjuten uppåt i höjdled och svänger runt linjen *y* = 3. Eftersom amplituden är 5, så varierar *y* mellan -2 och 8.

För att rita upp en sinusfunktion på papper kan man t.ex. räkna fram funktionens värde för några olika vinklar, sätta in dessa punkter i ett koordinatsystem och sedan rita upp kurvan. Alternativt kan man använda grafritande räknare och rita av utseendet.

Om du vill veta mer om något koncept, kolla gärna på internet (Wikipedia och www.matteguiden.se är bra, till exempel) eller i en gammal mattebok.
Det går även bra att mejla lärarna och fråga.