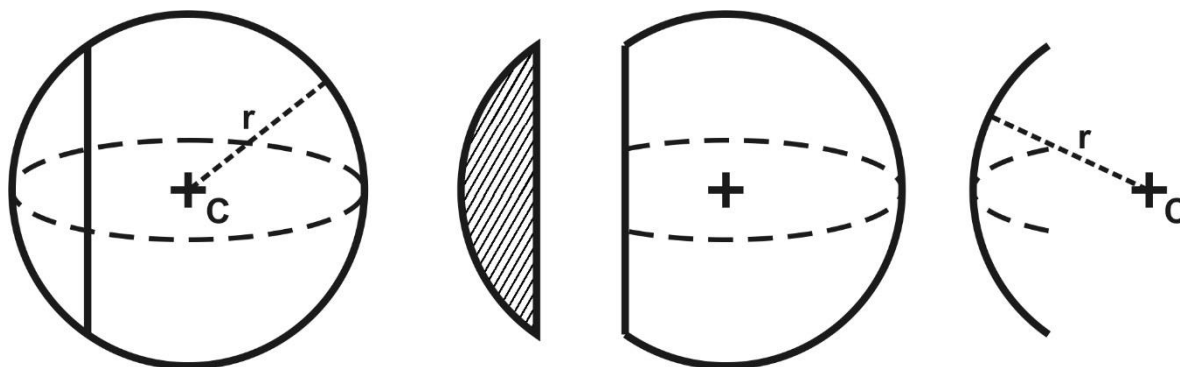


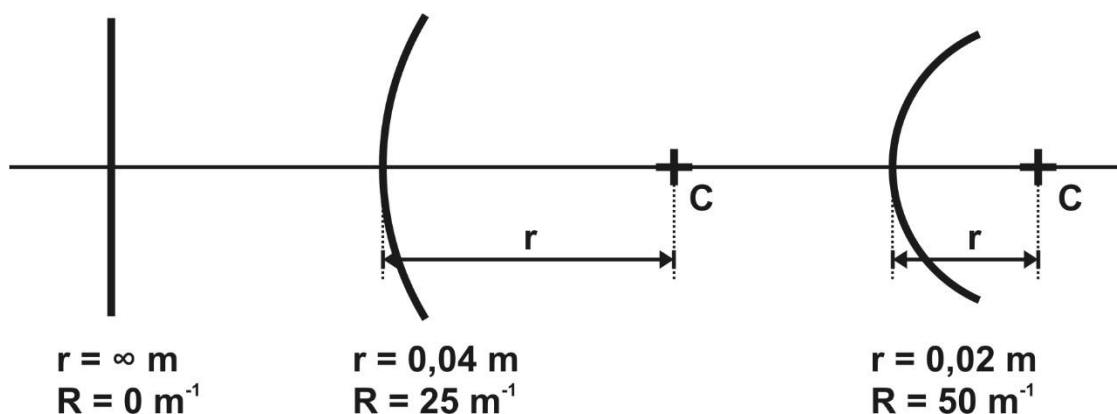
Föreläsning 4-5 (kap 3.1-3.6 i Optics)

Sfärisk krökning och att mäta den; sag-formeln

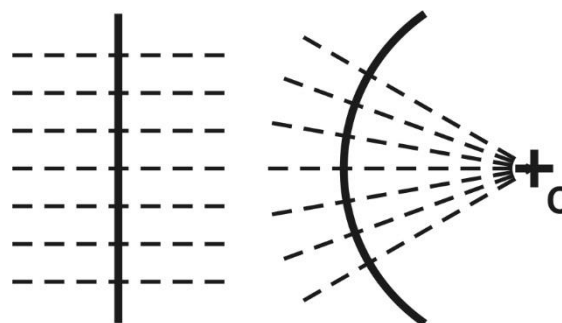
Den sfäriska ytan är den viktigaste typen av yta inom optiken. Det är den naturliga form två ytor får om de gnids mot varandra och ytorna på de allra flesta linser kan behandlas som sfäriska när vi räknar och ritar i denna kurs. En sfärisk yta är en del av en sfär eller ett klot, som t.ex. en såpbubbla. Om man tänker sig att vi skär av ena sidan av en såpbubbla så skulle vi få en sfäriskt krökt yta, så som visas i figuren nedan.



Här betecknar vi sfärens (såpbubblans) mittpunkt med C och dess radie med r . För den sfäriska ytan innebär detta att C är ytans krökningscentrum och r är ytans krökningsradie (som anges i meter [m]). Det är också vanligt att tala om ytans krökning, $R = 1/r$ (anges i 1/meter [m^{-1}]). Figuren nedan visar exempel på olika ytor med olika krökningsradie och krökning. En plan yta har en oändligt lång krökningsradie ($r = \infty$ m) och noll krökning ($R = 0$ m^{-1}). En kraftigt krökt sfärisk yta (som fås från en liten sfär) har en kort krökningsradie och en stor krökning.



Det karaktäristiska för en sfärisk yta är att normalen (riktningen vinkelrät mot ytan) alltid går genom ytans krökningscentrum, C , oberoende av var på ytan vi tittar. För en plan yta, där normalerna i olika punkter på ytan är parallella med varandra, gäller egentligen samma sak, men krökningscentrum ligger i oändligheten. (se figuren bredvid, normalerna till ytorna är ritade som streckade linjer).

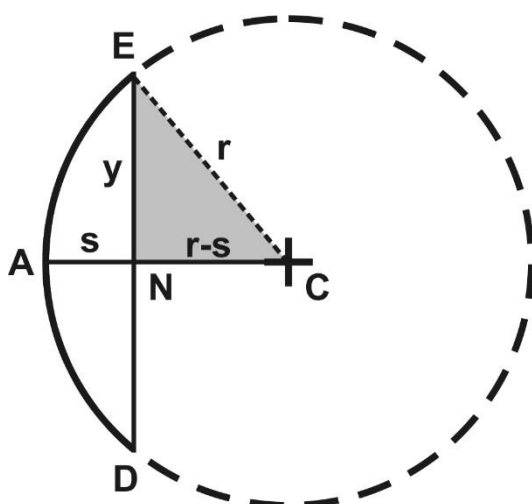


Sag-formeln

Oftast vet man inte var ytan har sitt krökningscentrum och kan därför inte mäta dess krökningsradie direkt. Det vanligaste sättet att mäta ytans krökningsradie är istället att mäta ytans så kallade sag (engelskt ord för häng?).

Figuren här nedan visar en sfärisk yta som en del av en sfär med krökningscentrum C . Med beteckningar från figuren är r ytans krökningsradie ($R = 1/r$ är ytans krökning), y är ytans ”höjd” (halva diametern) och s är ytans sag. Om man mäter s och y (fig 3.3-3.5 i *Optics* visar hur mätningen kan utföras) kan man använda den gråmarkerade triangeln för att beräkna r genom olika varianter av sag-formeln:

$$r = \frac{y^2}{2s} \quad R = \frac{2s}{y^2} \quad s = \frac{y^2}{2r} \quad s = \frac{y^2 R}{2}$$



Härledning av sag-formeln m.h.a. Pythagoras sats i triangeln ENC :

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (r-s)^2 \\ r^2 &= y^2 + r^2 - 2rs + s^2 \\ 2rs &= y^2 + s^2 \\ r &= \frac{y^2}{2s} + \frac{s}{2} = \left\{ \text{om } s \text{ är liten} \right\} \approx \frac{y^2}{2s} \end{aligned}$$

Sag-formeln är en approximation och förutsätter att s är litet i förhållande till krökningsradien. Det gäller i de allra flesta fall eftersom ytans krökningsradie, r , normalt är mycket längre än ytans halva diameter, y .

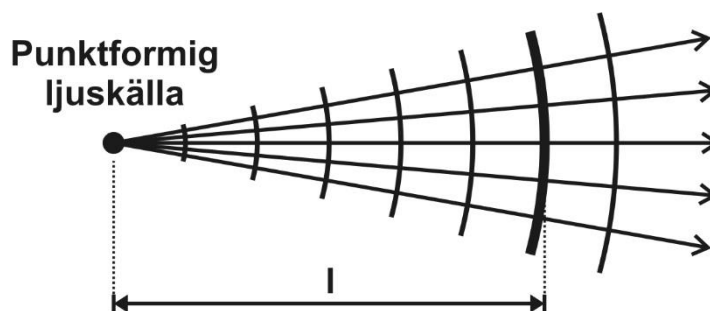
Exempel: $r = 1$ m och $y = 5$ cm = 0,05 m ger $s = 1,25$ mm.

Vågfrontskrökning

Ljusets utbredning kan beskrivas med hjälp av både strålar och vågfronter (där vågfronten är vinkelrät mot strålarna). Ljuset som kommer från en punktkälla har sfäriska vågfronter (se figuren här bredvid). Precis som för sfäriska ytor kan man beskriva formen på en sfärisk vågfront med dess krökning,

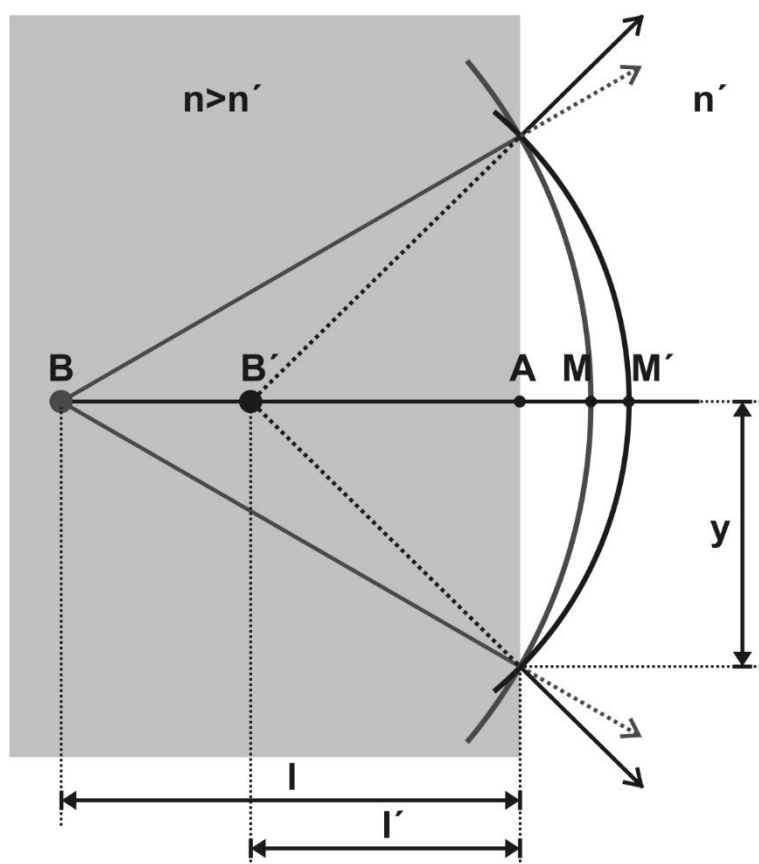
$$R = \frac{1}{l}$$

Här är l avståndet i meter från punkten som ljuset kommer ifrån till det plan där man mäter vågfrontskrökningen. Krökningens värde beror alltså på hur långt bort ljuskällan är; nära punktkällan är vågfrontskrökningen stor och så minskar den successivt ju längre bort från källan man är. Vågfrontskrökningen blir noll när källan ligger oändligt långt bort (plan vågfront).



Vågfrontskrökning vid brytning i plan gränsyta

När en vågfront träffar en optisk gränsyta, kommer dess krökning att ändras. Figuren nedan visar ett sådant exempel för en plan yta. n är brytningsindex före ytan och n' är brytningsindex efter ytan. I detta fall är n större än n' ($n > n'$) vilket innebär att ljuset går snabbare i n' än i n . Om gränsytan inte hade funnits hade strålnippet från punkten B (objektet) haft den vågfront som i figuren går genom M . Men eftersom ljuset färdas snabbare i n' kommer mitten av vågfronten (som träffar gränsytan först) att ha hunnit en längre sträcka (fram till M') när kanterna av vågfronten når ytan. Den nya vågfronten efter ytan kommer alltså att vara mer krökt och se ut att komma ifrån punkten B' (bilden) istället. I figuren är de förlängda strålarna före och efter streckade för att markera att de bara visar strålarnas riktning, men att strålarna inte går där på riktigt.



Resonemanget ovan kan också beskrivas i formler. Eftersom det tar lika lång tid för ljuset att gå sträckan AM i brytningsindex n som att gå AM' i n' så är:

$$\frac{AM}{v} = \frac{AM'}{v'} \Rightarrow nAM = n'AM'$$

så formeln för vågfronterna blir:

$$AM = s = \frac{Ry^2}{2} \text{ och } AM' = s' = \frac{R'y^2}{2}$$

där R är vågfrontens krökning före brytning i ytan ($R=1/l$) och R' är vågfrontens krökning efter brytning ($R'=1/l'$). Detta ger:

$$nAM = n'AM' \Rightarrow ns = n's' \Rightarrow$$

$$n \frac{Ry^2}{2} = n' \frac{R'y^2}{2} \Rightarrow nR = n'R' \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{n'}{l'} = \frac{n}{l}} \quad (\text{Samma som tidigare!})$$

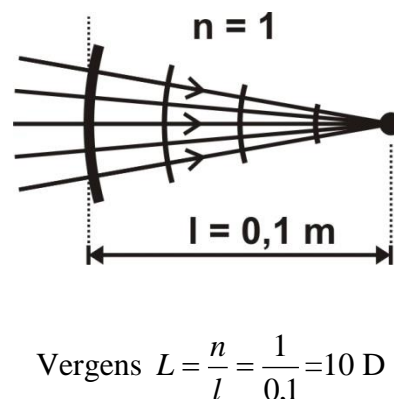
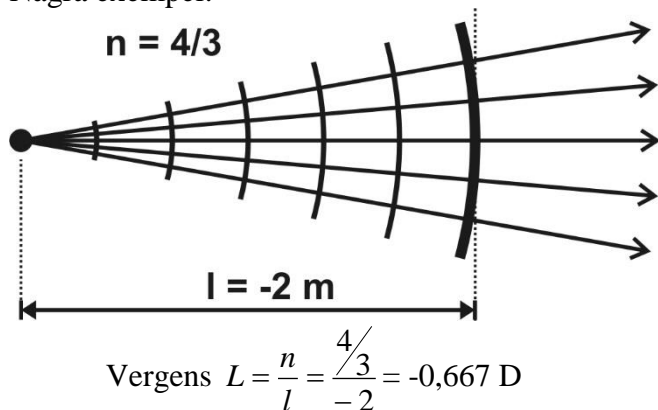
Vergens

Vågfrontskrökningen multiplicerat med brytningsindex, $nR=n/l$, kallas för strålnippets vergens och brukar betecknas med L . Uttryckt i vergenser blir formeln för brytning i plan gränsyta:

$$\boxed{L' = L} \quad \text{där} \quad \boxed{L = \frac{n}{l}} \quad \text{och} \quad \boxed{L' = \frac{n'}{l'}}$$

L är alltså vergensen hos infallande ljus (före brytning i ytan) och L' är vergensen på ljuset efter brytning i ytan. Enheten för vergens är dioptri [D] och motsvarar att man anger l och l' i meter.

Några exempel:



(Under teckenkonventioner nedan ska vi titta på anledningen till minustecknet i första exemplet)

Eftersom brytningsindex för luft är 1,0 kommer vergensen på ljuset i luft att vara samma sak som vågfrontskrökningen. Som formeln $L = L'$ visar så ändrar en plan gränssyta inte ljusets vergens, trots att den ändrar vågfrontskrökningen. Däremot ändrar krökta ytor ljusets vergens.

Paraxial approximation

I princip kan man ta reda på hur ljuset propagerar efter olika gränssytor genom att följa en massa strålar med hjälp av brytningslagen ($n \sin i = n' \sin i'$, se figuren på nästa sida), s.k. ray tracing. Detta tar dock lång tid och görs normalt med dator. Ofta är dock vinklarna små så att man kan räkna i s.k. paraxial approximation. Det innebär att vi använder en förenklad form av brytningslagen, $ni = n'i'$, som gäller för små vinklar i och i' . Vi använder även att höjderna är små så att de approximativa sag-formlerna ovan gäller för ytans krökning.

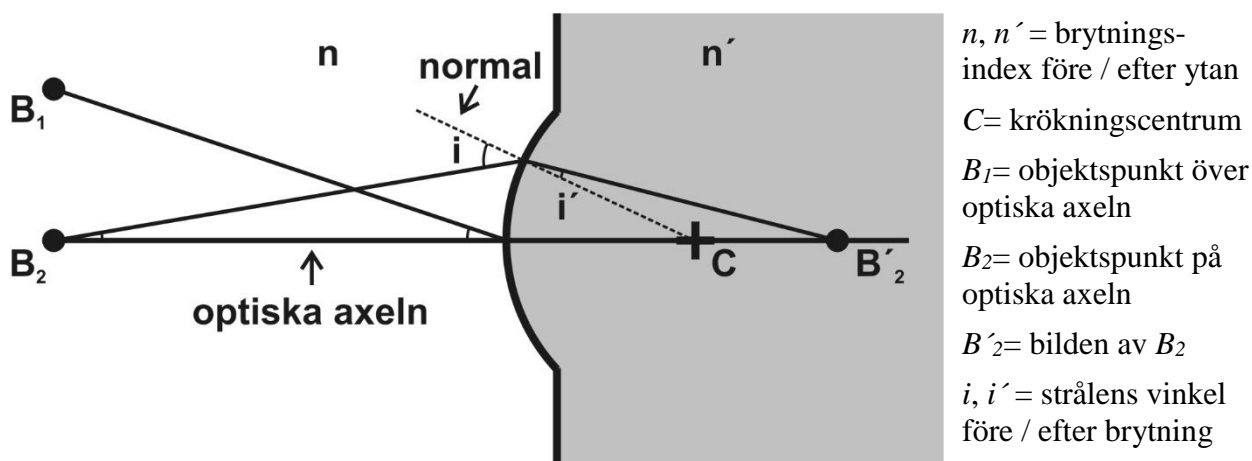
I paraxial approximation antar vi alltså att för alla infalls-, brytnings- och strålvinklar mot axeln gäller:

$$\sin i = \tan i = i$$

Observera att i paraxial approximation måste vinklarna anges i radianer!*

Paraxiala approximationen gäller för avbildning med strålar som kommer in med liten vinkel mot ytans normal, d.v.s. alla strålar ska gå nära systemets optiska axel; ytans apertur (öppning) får inte vara för stor och objektpunkter får inte ligga för långt bort från optiska axeln (se figur på nästa sida). Den optiska axeln går genom ytans krökningscentrum (mitt igenom ytan). En stråle som går längs med den optiska axeln kommer därför inte att ändra riktning när den passerar ytan (eftersom den kommer in längs med ytans normal, d.v.s. har infallsvinkel $i = 0$). Om det finns flera ytor är den optiska axeln linjen genom alla ytors krökningscentrum. System som på detta sätt har alla krökningscentra på gemensam axel kallas för centrerade och symmetriska.

* Vi använder här den s.k. små-vinkel-approximationen, som innebär att sinus och tangens för en vinkel kommer att vara väldigt nära vinkels egen storlek angiven i radianer. Att $\sin i \approx \tan i \approx i$, kan man förstå genom att titta på serietvecklingen för sinus och tangens: $\sin i = i - \frac{i^3}{6} + \frac{i^5}{120} - \dots$ och $\tan i = i + \frac{i^3}{3} + \frac{2i^5}{15} + \dots$ när i är litet, är i^3 och i^5 så små att vi kan försumma dem. Observera att serietvecklingen av cosinus ser annorlunda ut: $\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{24} - \dots$ om vinkeln i är väldigt liten så blir alltså $\cos i \approx 1$.

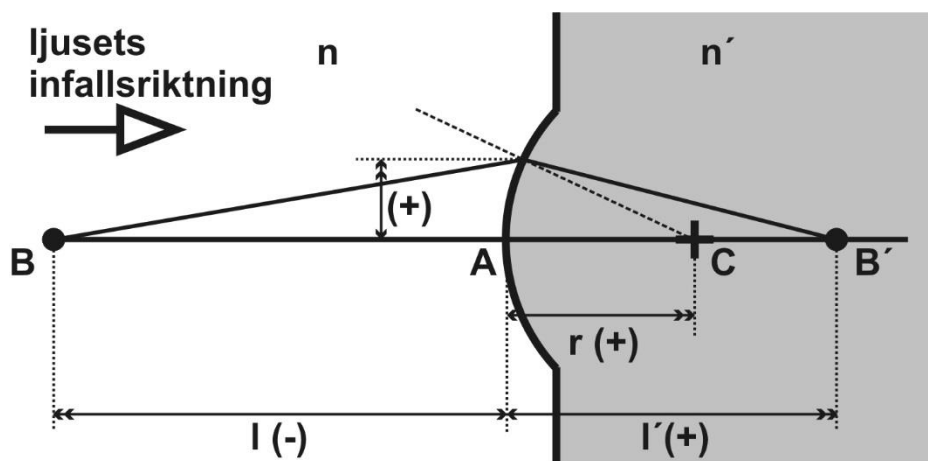


Tabell 3.1 på sidan 64 i *Optics* anger hur stort fel den paraxiala approximationen ger vid olika infallsvinklar, ju större vinkel desto större fel, t.ex. ger en vinkel $i=10^\circ$ ($=0,174$ radianer) ett fel på 1%, vilket ofta anses vara approximationens gräns. När vinklarna blir stora kommer strålarna inte längre att samlas till en bildpunkt och bilden blir suddig p.g.a. aberrationer (se figur 2.10, 3.10 och 3.11 i *Optics*). Detta hindrar dock inte att man använder paraxial approximationen även när vinklarna är större för att få ungefärligt läge och storlek på bilden och sedan utför man ytterligare beräkningar för att bedöma bildens kvalitet.

Teckenkonventionen

För att kunna räkna på ljusets brytning måste vi kunna skilja på avstånd som är före och efter ytan och över och under optiska axeln. Detta görs med hjälp av positiva och negativa sträckor, där tecknet anger riktningen.*

Positiva sträckor är från vänster till höger och nerifrån och upp. Vi ritar alltid ljuset inkommande ifrån vänster, så att det infallande ljusets riktning är positiv. Figuren nedan visar ett exempel för brytning i sfärisk gränsyta, här använder vi ytans vertex, A , (vertex definieras som punkten där optiska axeln skär ytan) som mittpunkt (origo) och alla sträckor mäts ifrån A . Vi anger t.ex. objektsavståndet, l , som avståndet från vertex, A , till objektet, B , som i figuren är en negativ sträcka eftersom den mäts från höger till vänster. Bildavståndet, l' , är avståndet från vertex till bilden, B' , och är här nedan en positiv sträcka. Avstånd vinkelrät mot axeln mäts från optiska axeln, positivt om uppåt och negativt om nedåt.



* Det finns även teckenkonventioner för vinklar, men eftersom vi använder dem så sällan nämns det endast som en fotnot här. Vinklar är positiva moturs och negativ när den går medurs, i *Optics* anges vinkel från stråle till optisk axel och från normal till stråle (se figur 3.12).

Teckenkonventionen gäller även krökningsradier på ytor och vågfronter; krökningsradien mäts från ytan / vågfronten till krökningscentrum. Detta innebär att den konvexa ytan i figuren på förra sidan har en positiv krökning, R . För vågfronter gäller motsvarande att:

Negativ vergens = divergent strålnippe (ljuset sprids ut ifrån en punkt, exempel 1 på sid 4)

Positiv vergens = konvergent strålnippe (ljuset samlas ihop mot en punkt, exempel 2 på sid 4)

Exempel på paraxial avbildning i plan gränsyta:

(t.ex. titta på något som ligger under vattenytan)

$$n = 4/3$$

$$n' = 1$$

$$l = -67 \text{ cm} = -0,67 \text{ m}$$

för att hitta bildläget, B' , kan vi använda

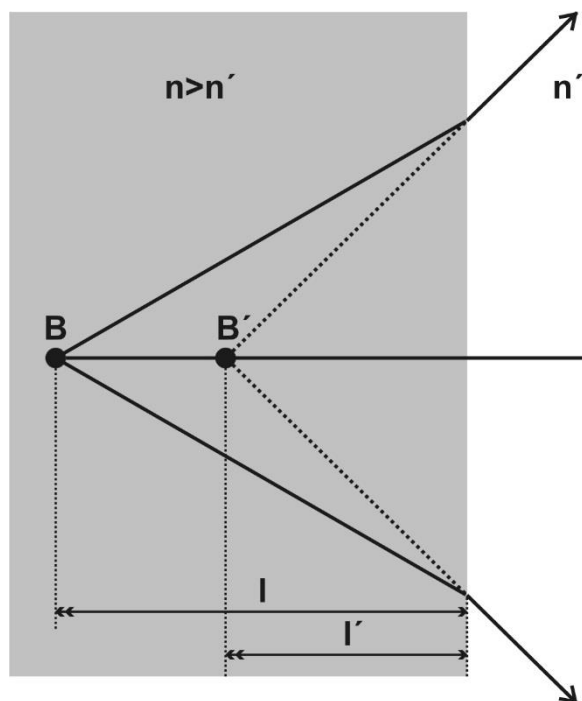
$$L = L' \quad \text{med} \quad L = n/l \quad \text{och} \quad L' = n'/l'$$

$$L = \frac{n}{l} = \frac{4/3}{-0,67 \text{ m}} = -2,0 \text{ D}$$

$$L' = L = -2,0 \text{ D}$$

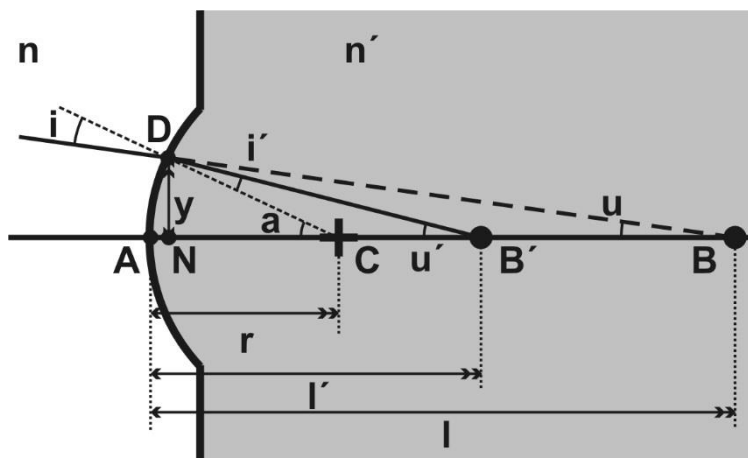
$$l' = \frac{n'}{L'} = \frac{1}{-2,0 \text{ D}} = -0,50 \text{ m}$$

Detta är en s.k. virtuell bild eftersom strålarna inte möts i B' på riktigt utan bara ser ut att ha mötts där (streckade linjer).



Paraxial brytning och avbildning i sfärisk gränsyta

Vi ska nu använda paraxial approximation för att ta fram en formel för hur ljus bryts i sfäriska ytor. I figuren nedan är objektet B med infallsvinkeln i och bilden B' med brytningsvinkeln i' utsatta tillsammans med hjälpvinklarna u , u' och a .*



* För att underlätta härledningen är figuren ritad så att alla vinklar och sträckor är positiva (om objektet hade varit reellt och legat framför ytan hade l och vinkeln u varit negativa).

Vi börjar med att ta fram ett förhållande mellan vinklarna. Eftersom vinkeln a i figuren är en yttervinkel till både triangel DCB och triangel DCB' så får vi:

$$i = a - u$$

$$i' = a - u'$$

Nu kan vi använda den paraxiala brytningslagen och få:

$$ni = n'i' \Rightarrow n(a - u) = n'(a - u') \Rightarrow$$

$$n'u' = nu + (n' - n)a$$

För att skriva detta uttryck i avstånd istället för i vinklar behöver vi uttryck för hjälpvinklarna u , u' och a . Vi antar förstås att alla vinklar är små. Vi antar också att vi kan försumma ytans sag (d.v.s. avståndet mellan vertex, A , och punkten N antas vara mycket litet) så att avstånden $NB \approx l$, $B' \approx l'$ och $r \approx r$. Då får vi:

$$u \approx \tan u \approx y/l$$

$$u' \approx \tan u' \approx y/l'$$

$$a \approx \tan a \approx y/r$$

Dessa tre vinklar insatta i den paraxiala brytningslagen ger:

$$n' \frac{y}{l'} = n \frac{y}{l} + (n' - n) \frac{y}{r}$$

Här kan vi förkorta med y på båda sidor så att uttrycket blir oberoende av vilken höjd strålen träffar ytan på (oberoende av y). Det innebär att alla strålar som först var på väg mot det virtuella objektet B kommer att ändra riktning i ytan så att de istället samlas i punkten B' .

B' blir alltså en bild av B och vi har fått avbildningsformeln för sfärisk gränsyta:

$$\boxed{\frac{n'}{l'} = \frac{n}{l} + \frac{(n' - n)}{r}}$$

Uttryckt i vergenser kan denna avbildningsformel skrivas som $L' = L + (n' - n)R$. Uttrycket $(n' - n)R$ anger hur mycket ljusets vergens ändras vid brytning i ytan. Vi inför beteckningen F för det:

$$F = (n' - n)R = \frac{(n' - n)}{r}$$

och kallar F för ytans brytkraft (ytans styrka) som anges i dioptrier [D]. Brytkraften är positiv för ytor som tenderar att ge konvergent ljus (som samlar ljuset) och negativ för ytor som ger divergent ljus (som sprider ljuset). Plana ytor ändrar inte ljusets vergens och har därför brytkraften 0 D.

Sammanfattningsvis kan avbildningsformeln för sfärisk gränsyta skrivas som:

$$\boxed{L' = L + F} \quad \leftarrow \text{Kursens viktigaste formel!}$$

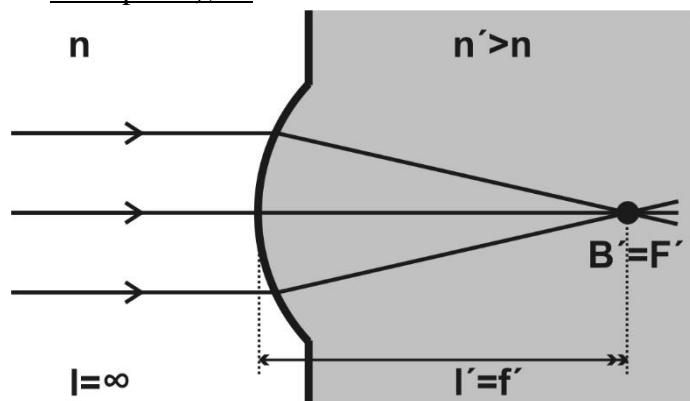
med bildvergens, objektsvergens och brytkraft i dioptrier. Formeln ser likadan ut även för speglar, linser och komplexa optiska system, men man använder olika uttryck för att räkna ut brytkraften. Ännu så länge har vi tagit fram brytkraften för en yta:

$$F_{\text{sferisk yta}} = \frac{(n' - n)}{r} \quad F_{\text{plan yta}} = 0 \text{ D} \quad (\text{en plan yta har oändlig krökningsradie, } r = \infty \text{ m, } R = 0 \text{ D})$$

Fokalpunkter och fokallängd

Avbildningsformeln innebär att för varje objektpunkt B finns en unik bildpunkt B' . Eftersom ljuset följer samma väg oberoende av vilket håll det går åt gäller även det omvända, d.v.s. ett objekt vid B' ger en bild vid B . B och B' kallas därför för konjugat eller konjugatpunkter. Det finns två konjugatpunkter som är speciellt viktiga:

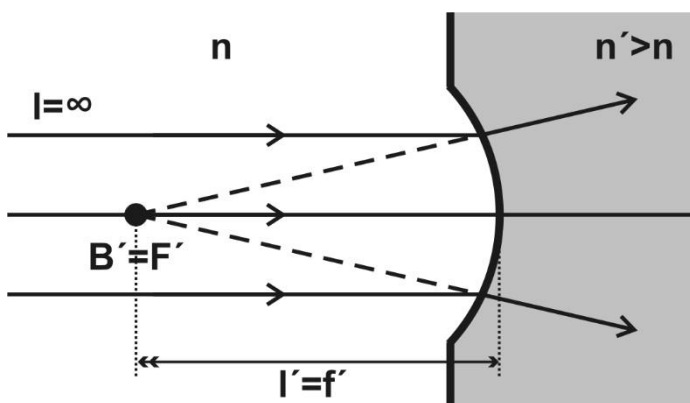
- När objektet på axeln ligger oändligt långt bort, hamnar bilden i bakre fokalpunkten (fokus, brännpunkt), F' :



Avståndet från ytans vertex till F' kallas för bakre fokallängden (brännvidden), f' . Objekt i oändligheten, $l = \infty$ m, innebär parallellt ljus in, $L = 0$ D, och bild i F' . Avbildningsformeln ger då:

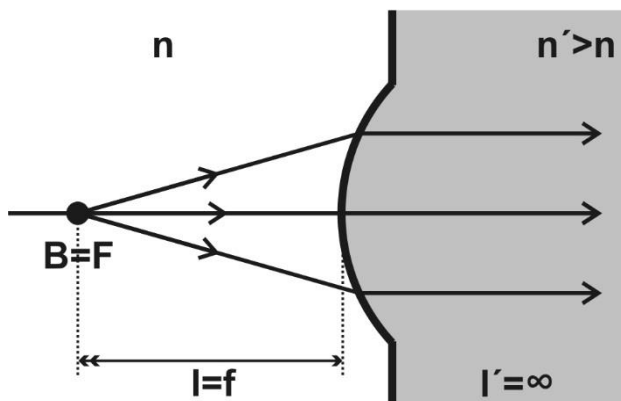
$$L' = F \quad \text{och med } L' = \frac{n'}{l'} \quad \text{och } l' = f' \quad \text{fås}$$

$$\frac{n'}{f'} = F \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{n'}{F}$$



Översta bilden visar en yta med positiv brytkraft ($F > 0$), vilket innebär att den bakre fokalpunkten ligger bakom ytan ($f' > 0$). För ett objekt i oändligheten bildas därför en reell bild i F' . Den nedre bilden visar en yta med negativ brytkraft ($F < 0$), vilket innebär att den bakre fokalpunkten ligger framför ytan ($f' < 0$). För ett objekt i oändligheten bildas därför en virtuell bild i F' .

- När bilden på axeln hamnar oändligt långt bort, ligger objektet i främre fokalpunkten (fokus, brännpunkt), F :

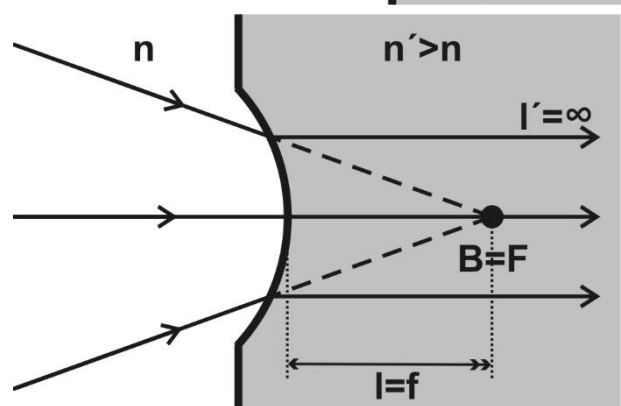


Avståndet från ytans vertex till F kallas för främre fokallängden (brännvidden), f .

Bild i oändligheten, $l' = \infty$ m, innebär parallellt ljus ut, $L' = 0$ D, och objekt i F .
Avbildningsformeln ger då:

$$L = -F \text{ och med } L = \frac{n}{l} \text{ och } l = f \text{ fås}$$

$$\frac{n}{f} = -F \Rightarrow f = -\frac{n}{F}$$



Översta bilden visar en yta med positiv brytkraft ($F > 0$), vilket innebär att den främre fokalpunkten ligger framför ytan ($f < 0$). För en bild i oändligheten krävs därför ett reellt objekt i F . Den nedre bilden visar en yta med negativ brytkraft ($F < 0$), vilket innebär att den främre fokalpunkten ligger bakom ytan ($f > 0$). För en bild i oändligheten krävs därför ett virtuellt objekt i F .

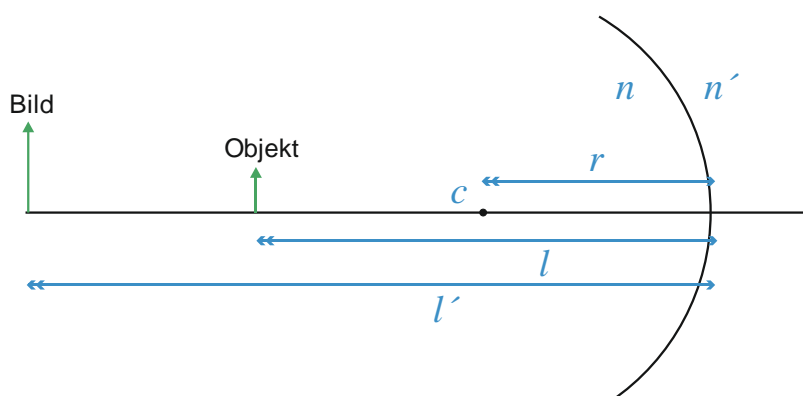
Sambanden för bakre och främre fokallängd beror alltså på systemets brytkraft, F , och brytningsindex bakom och före systemet, n' och n :

$$f' = \frac{n'}{F} \quad f = -\frac{n}{F} \quad \text{vilket ger förhållandet} \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Fokalpunkterna är till stor nytta även när objekt eller bild inte ligger där. Vid strålkonstruktion, när man ska följa olika strålar från objektet, kommer en stråle som faller in parallellt med optiska axeln att brytas till F' och en stråle som kommer in genom (eller siktar mot) F kommer ut parallellt med optiska axeln.

Exempel på avbildning i sfärisk gränsyta

En fisk befinner sig vid bakkanten av en vattenfylld sfärisk skål med radien 2 dm. Var hamnar bilden?



Givet:

$$n = 4/3, n' = 1$$

$$r = -0,2 \text{ m}$$

$$l = -0,4 \text{ m}$$

Beräkningar:

$$F = (n' - n)/r = 1,66 \text{ D}$$

$$L = n/l = -3,33 \text{ D}$$

$$L' = L + F = -1,67 \text{ D}$$

$$l' = -0,6 \text{ m}$$