

# ***Tentamen i SK1111 Elektricitets- och vågrörelselära för K, Bio och Medtek to den 19 okt 2009 kl 14-19***

---

**Tillåtna hjälpmedel:**  *Två st A4-sidor med eget material, på tentamen utdelat datablad, matematik-handboken Beta samt räknedosa.*

*Skrivningen består av 10 problem som kan ge 4 poäng maximalt vardera. A-delen innefattar 5 problem och B-delen innefattar 5 problem. För godkänt, grad E krävs totalt 60% på A-delen. Alla resonemang skall redovisas och figur ritas vid behov. Kraven för olika betygsgrader finns längst bak i tentamen.*

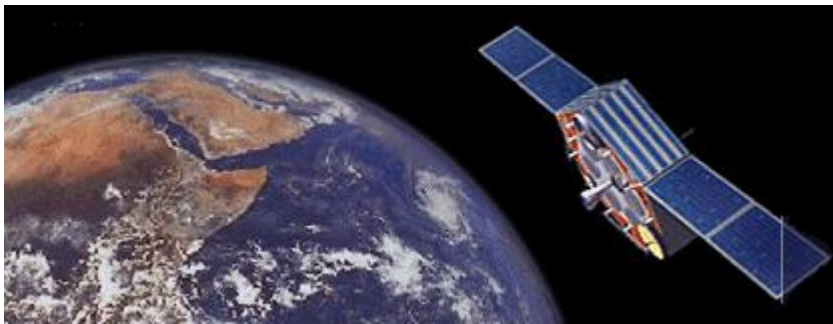
Lars-Gunnar Andersson och Lars-Erik Berg 091019

**Lycka till !**

---

## **A-delen**

A1. I Bondfilmen "Golden eye" observeras personer från en spionsatellit med infraröd-strålning. Undersök om det är möjligt att upplösa personer då satelliten befinner sig på avståndet 360 km ovanför jorden. Detektorn består av en parabol med cirkulär öppning med diametern 78 cm. Observationerna görs med våglängden 1,1  $\mu\text{m}$ . Antag att personerna är meterhöga. (4p)



A2. En YAG-laser har använts för test av en ny typ av tandbehandling mot karies. Lasern ger en pulsad stråle med pulser som är 4 ps långa. Laserstrålen avger energin 1,38 J till i ett cirkelrunt hål i tanden med radien 2 mm.

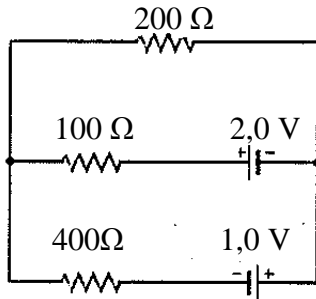
- Räkna ut vilken intensitet  $I$  ( $= S_{ave}$ ) som laserstrålen ger. (2p)
- Beräkna vilken elektrisk fältstyrka  $E$  som finns i laserstrålen. (2p)

A3. Magnetic Resonance Imaging (MRI) är en medicinsk teknik för att göra bilder av kroppens inandöme. Patienten placeras i ett starkt magnetiskt fält. Om det magnetiska fältet snabbt skulle försvinna vid ett strömavbrott kan strömpulser uppkomma i kroppen genom induktion. Den bildade emk:n får inte vara över gränsvärdet 0,010 V. Kroppens bioelektriska impedans kan sättas till  $Z = 443 - j77 \Omega$ , vilket motsvarar en kapacitiv krets med en resistor i serie med en kondensator.

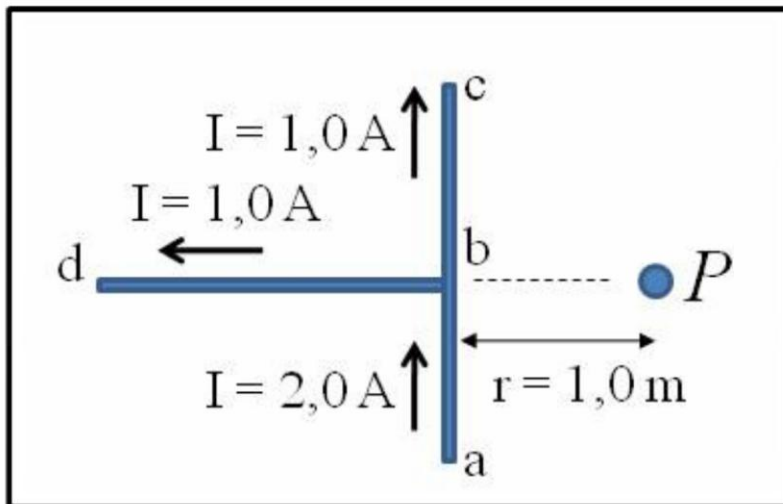
- Hur stor strömpuls kan uppkomma vid gränsvärdet i kroppen. (2p)
- Rita ett diagram med emk:n  $\mathcal{E}$  och strömmen  $I$  som visar hur de ligger fasförskjutna. (2p)

A4. See the DC-circuit below.

- Determine the magnitudes and directions of all electric currents in the circuit. (3p)
- Determine the power  $P$  supplied to each of the resistors in the circuit (1p)



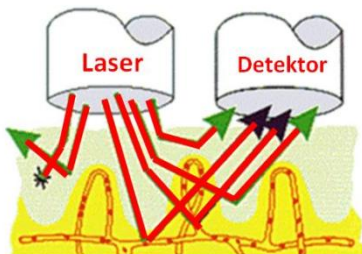
A5. Tre mycket långa ledare är kopplade till varandra enligt figuren. Strömmarna är 2,0 A och 1,0 A som figuren visar. Bestäm det magnetiska fältet  $B$  i punkten  $P$  till storlek och riktning.



Ledning: Utnyttja uttrycket för  $B$  från  $\infty$  lång ledare. Addera olika bidrag. Utred först vilka delar som ger bidrag.

### B-delen

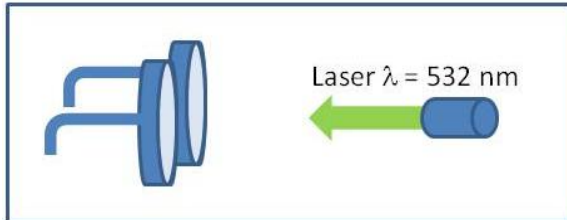
B1. Man kan mäta blodflöden med hjälp av s.k. Doppler-velocimetri. En sådan apparat använder sig av en diodlaser ( $\lambda = 619,3 \text{ nm}$ ) där ljuset skickas mot de röda blodkropparna i ett blodkärl. Ljuset som reflekteras detekteras samtidigt med det utsända ljuset och man uppmäter en frekvensskillnad på 5,8 kHz. Beräkna blodkropparnas hastighet i kärlet.



B2. I tidningarna har vi nyligen läst att piloter på trafikflygplan har bländats av grönt laserljus vid landning. Någon har riktat en laserpekare mot planen. De flesta laserpekare använder s.k. frekvensdubblade YAG-lasrar som ger våglängden 532 nm.

a) Vad är det tunnaste skiktet av  $\text{MgF}_2$  med brytningsindex  $n_{\text{MgF}_2} = 1,38$  man kan förånga på ett glasöga med brytningsindex  $n_{\text{glas}} = 1,52$  för att minimera och slippa transmissionen av laserljuset? (4p)

b) Om man i stället missbedömer situationen här och bestämmer tunnaste tjockleken för ett antireflexivt skikt när så lite som möjligt reflekteras, vad är tunnaste tjockleken på skiktet då? (+1p)



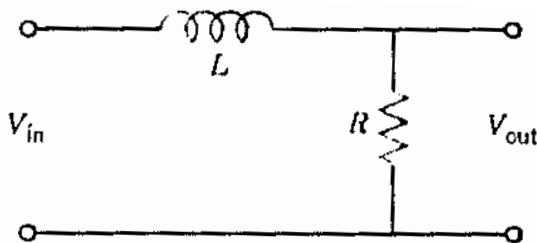
B3. Kretsen i figuren nedan är ett enkelt växelströmsfilter för separering av frekvenser.

a) Bestäm storleken på spänningen  $V_{out}$  över  $R$  när  $R = 100 \Omega$ ,  $V_{in} = 20 \text{ V}$ ,  $f = 1000 \text{ Hz}$  och  $L = 10 \text{ mH}$  (1p)

b) Bestäm storlekarna på spänningarna  $V_L$  över  $L$  och  $V_R (= V_{out})$  över  $R$  i kretsen. Visa att summan av dem är lika med spänningen  $V_{in}$ , dvs  $V_L + V_R = V_{in}$ , och rita upp det i ett diagram så att man kan se det. (2p)

c) Bestäm om kretsen är ett hög- eller lågpasfilter om man betraktar  $V_{out} (= V_R)$  som en funktion av frekvensen (eller vinkelfrekvensen  $\omega$ ). (1p)

Ledning för c): Bilda  $\lim_{\omega \rightarrow 0} V_{out}$  respektive  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{out}$  och dra slutsatser av det.



B4. Om en allmän impedans  $Z = R + jX$  ansluts i serie till en spänningskälla med den inre impedansen  $Z_i = R_i + jX_i$  kan man visa att den största effektutvecklingen  $P$  i  $Z$  fås om  $X = -X_i$  (Behöver inte visas!), vilket betyder att den totala impedansen blir rent reell och lika med  $Z_{tot} = Z + Z_i = R + R_i = R_{tot}$ .

Teckna nu effekten i  $Z$  som  $P = ZI^2 = RI^2 = R \left( \frac{V}{(R + R_i)} \right)^2 = \left( \frac{R}{(R + R_i)} \right)^2 V^2$ .

Optimera map  $R$  och bestäm  $P_{max}$  och beräkna  $P_{max}$  om  $V = 220 \text{ V}$  och  $R_i = 20 \text{ k}\Omega$ . Det kallas anpassning. (4p)

B5. En sfär med radien 20 cm är helt fylld av polyvinylklorid med dielektricitetskonstanten  $K = 3,18$ . Laddningstätheten är  $\rho = +2 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^3$  i polyvinylkloriden. Laddningen är homogent fördelad i polyvinylkloriden.

a) Bestäm storlek och riktning på den elektriska fältstyrkan vid radierna  $r = 5 \text{ cm}$  och  $r = 30 \text{ cm}$ . (2p)

b) Bestäm och rita ett diagram hur  $E$  varierar i sfären från  $r = 0 \text{ cm}$  till  $r = 20 \text{ cm}$  och utanför sfären för  $r > 20 \text{ cm}$ , ange speciellt vad som händer med kontinuiteten hos  $E$  i diagrammet. (2p)

## SK1111 Elektricitets- och vågrörelselära

### Tentamensprincipen enligt ECTS-systemet, kraven för olika betygsgrader

Tentamen är uppdelad i två delar, del A och del B.

Del A består av 5 st något enklare uppgifter, varje uppgift kan ge maximalt 4p, totalt har A-delen 20p.

Del B består av 5 st uppgifter som kräver större problemlösningsförmåga, varje uppgift kan ge 4p, totalt har B-delen 20p. Alla problem får behandlas.

Betygsgraderna A, B, C, D, E, FX och F finns, grad A är högst.

#### Minimikraven för de olika betygsgraderna

Betyg <b>A</b>	60 % på A-delen (12p) + 60 % på B-delen (12p)
Betyg <b>B</b>	60 % på A-delen (12p) + 40 % på B-delen (8p)
Betyg <b>C</b>	60 % på A-delen (12p) + 20 % på B-delen (4p)
Betyg <b>D</b>	80 % på A-delen (16p) <b>eller</b> 60 % på A-delen (12p) + 10 % på B-delen (2p)
Betyg <b>E</b>	60 % på A-delen (12p)
Betyg <b>FX</b>	Underkänt inom en viss gräns under E med rätt att komplettera till E, examinator bestämmer gränsen
Betyg <b>F</b>	Underkänt

60 % på A-delen måste alltså klaras för samtliga betygsgrader, och poängen på B-delen bestämmer betyget. D-graden kan fås genom att klara 80 % på A-delen.

#### Hjälpmedel

Datablad med konstantvärden delas ut vid tentamen och finns på kursens hemsida.

2 egna A4-sidor får användas med innehåll från kursen. Övriga parametervärden som behövs finns angivet på tentan. Matematiktabeller, Beta eller andra, får användas.

#### Målinriktning i ECTS-systemet

Målinriktningen kräver att problemen sorteras i en A-del och en B-del, så att tentanderna ska kunna göra egna val beträffande betygsgraden.

## Effekt

### Lösning

Amperes lag  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$  Ledaren db ger inget bidrag i  $P$  till magnetfältet eftersom

$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$  i punkten  $P$ . Vi kan betrakta ac som två ledare ab och bc som bägge två ger halva fälten från oändligt långa ledare, dvs  $B_{ab} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I_{ab}}{2\pi r}$  och  $B_{bc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I_{bc}}{2\pi r}$  som samverkar då strömmarna går åt samma håll,

$$\text{Vi får } B_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I_{ab}}{2\pi r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I_{bc}}{2\pi r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0}{2\pi r} (I_{ab} + I_{bc}) = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi} \frac{(2,0 + 1,0)}{1,0} T = 3,0 \times 10^{-7} T$$

Med tumregeln framgår att fältet i  $P$  går in i papperets plan.



I Bondfilmen "Golden eye" observeras personer från en spionsatellit med infraröd-strålning. Undersök om det är möjligt att upplösa personer då satelliten befinner sig på avståndet 360 km ovanför jorden. Detektorn består av en parabol med cirkulär öppning med diametern 78 cm. Observationerna görs med våglängden 1,1  $\mu\text{m}$ . Antag att personerna är meterhög.

### Lösning

$$\text{Rayleighkriteriet ger kritiska vinkeln } \theta_c = 1,22 \frac{\lambda}{D} = \frac{1,22 \times 1,1 \times 10^{-6}}{0,78} \text{ rad} \approx 1,7 \times 10^{-6} \text{ rad} .$$

$$\text{Den aktuella vinkeln är } \theta = \frac{\text{bågen}}{\text{radien}} = \frac{1}{360 \times 10^3} \text{ rad} = 2,8 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Den kritiska vinkeln,  $\theta_c < \theta$  varför det går att upplösa personerna.

## Del A

A1. En laddning på  $q_1 = 7 \mu\text{C}$  ligger i punkten  $P_1 = (2;3;2)$  cm, och en laddning  $q_2 = 2 \mu\text{C}$  ligger i punkten

$P_2 = (7;1;7)$  cm. I punkten  $P_3$  ligger den okända laddningen  $q_3$ . Den elektriska fältstyrkan  $E_{32}$  från  $q_3$  i punkten  $P_2$  är  $E_{32} = (2;5;1)$  MN/C

Beräkna den totala kraften på  $q_2$  till storlek och riktning. ( 4p )

A2. Betrakta likströmskretsen nedan.

- a) Bestäm samtliga strömmar genom resistorerna  $R_1$ ,  $R_2$  och  $R_3$ . ( 3p )  
b) Bestäm den utvecklade effekten i varje resistorer  $R_1$ ,  $R_2$  och  $R_3$ . ( 1p )  
 $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 350 \Omega$  och  $R_3 = 700 \Omega$

A3. På ytan av en metallsfär med radien 10 cm finns laddning homogent utspridd.

Ytladdningstätheten är  $\sigma = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$ .

- a) Bestäm den elektriska fältstyrkan dels inuti sfären i punkten  $r = 5 \text{ cm}$ , dels utanför sfären i punkten  $r = 20 \text{ cm}$ . ( 3p )  
b) Beräkna den totala laddningen  $Q$  som finns på sfären. ( 1p )

A4. Hur mycket effekt uppfångas av ett öra vid normal konversation? Ett typiskt öra har arean  $2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  hos en vuxen människa. Ljudintensiteten kan sättas till  $3,2 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$  vid lyssnarens öra. ( 4p )

A5. Christer Fuglesang åker på sin andra rymdfärd till den internationella rymdstationen ISS under 2009. Den ligger på medelavståndet 350 km från jordytan. Skulle det på en rymdpromenad om det var klar sikt i princip vara möjligt för honom att kunna se två kraftiga lasrar på KTH Campus, en på militärhögskolans tak och en på kårhusets tak ca 100 m därifrån, som två separata ljuskällor? Pupilldiametern kan sättas till 4 mm. Lasrarna har våglängden 633 nm (rött ljus). ( 4p )

**International Space Station ISS**



## Del B

B1. Study the AC-circuit in the figure below.

- a) Determine the voltage  $V_{out}$  over the resistance  $R$ . ( 2p )  
b) Is the circuit a low-pass filter or high-pass filter? ( 2p )

$V_{in} = 10 \text{ V}$ ,  $f = 1000 \text{ Hz}$ ,  $R = 200 \Omega$  and  $C = 1 \mu\text{F}$ .

*Hint: In b) Calculate the limit for  $V_{out}$ , when  $\omega \rightarrow 0$  and when  $\omega \rightarrow \infty$  respectively.*

B2. Vid fotografering under semestern använde Lars sin nya digitalkamera. Den inbyggda blixten laddades upp enligt diagrammet nedan.

Bestäm resistansen som ingår i kretsen vid uppladdningen.

Kapacitansen som laddas upp är på  $C = 150 \mu\text{F}$ . ( 4p )

B3. All utrustning i en bil måste dimensioneras för att tåla de magnetfält som uppkommer runt generator, tändsystem mm. En kvadratisk strömkrets har sidan 5 cm och påverkas av ett magnetfält med frekvensen 200 Hz och amplituden 0,15 T. Den magnetiska fältstyrkan är sinusformad. Vilken spänning alstras maximalt i strömkretsen? ( 4p )

B4. I en apparat som mäter promillehalten i utandningsluft måste man kontrollera att det verkligen är utandningsluft som passerar. Det gör man genom att mäta temperatur, koldioxid och luftfuktighet på den gas som passerar. Luftfuktigheten mäts genom att luften passerar mellan plattorna i en plattkondensator som ska ha spänningen 12 V. Plattarean är 8,0 cm<sup>2</sup>.

a) Hur hög kan kapacitansen göras om man maximalt vill ha ett  $E$ -fält med en elektrisk fältstyrka på 50 kV/m, den sk dielektriska styrkan för luft under rådande förhållanden? ( 3p )

b) Standardvärdet för den kritiska elektriska fältstyrkan (den dielektriska styrkan) i luft brukar sättas till ca 3 MV/m. Motivera varför värdet på  $E$  i a) är avsevärt lägre än 3 MV/m. ( 1p v)

B5. Det finns färgade lysdioder tillsammans med färgkänsliga ljussensorer som ingår i en byggsats. Sensorerna är behandlade med ett antireflexivt skikt (AR-skikt) för "sin" färg, dvs för rött, grönt eller blått.

a) Bestäm hur tjockt ett skikt med brytningsindex 1,4 ska vara om glaset har brytningsindex 1,6? Räkna för våglängden 628 nm. ( 2p )

För att interferensen ska bli så bra som möjligt mellan två strålar, krävs förutom de vanliga vägskillnadsvillkoren att intensiteterna för strålarna är så lika som möjligt. Om reflektanserna  $R_1$  och  $R_2$

för de två interfererande strålarna i gränssytan luft/AR-skikt respektive gränssytan AR-skikt/glas är lika betyder det att intensiteterna är lika.

$R_1$  och  $R_2$  är funktioner av  $n_1$  (AR-skiktets brytningsindex) och  $n_2$  (glasets brytningsindex) enligt:

$$R_1 = \left(\frac{n_1-1}{n_1+1}\right)^2 \quad (1) \text{ och } R_2 = \left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2 \quad (2), \text{ uttrycken (1) och (2) behöver inte visas.}$$

b) Sätt  $R_1 = R_2$  och uttryck  $n_1$  i  $n_2$  enligt (1) och (2). Dvs  $n_1$  kan beräknas ur  $n_2$  för att få det värde som ger bästa utsläckning. Beräkna bästa värdet på  $n_1$  och jämför med  $n_1 = 1,4$  som är givet i a). (2p)

## SK1111 Elektricitets- och vågrörelselära

### Tentamensprincipen enligt ECTS-systemet, kraven för olika betygsgrader

Tentamen är uppdelad i två delar, del A och del B.

Del A består av 5 st något enklare uppgifter, varje uppgift kan ge maximalt 4p, totalt har A-delen 20p.

Del B består av 5 st uppgifter som kräver större problemlösningsförmåga, varje uppgift kan ge 4p, totalt har B-delen 20p.

Betygsgraderna A, B, C, D, E, FX och F finns, grad A är högst.

### Minimikraven för de olika betygsgraderna

Betyg **A** 60 % på A-delen (12p) + 60 % på B-delen (12p)

Betyg **B** 60 % på A-delen (12p) + 40 % på B-delen (8p)

Betyg **C** 60 % på A-delen (12p) + 20 % på B-delen (4p)

Betyg **D** 80 % på A-delen (16p) **eller** 60 % på A-delen (12p) + 10 % på B-delen (2p)

Betyg **E** 60 % på A-delen (12p)

Betyg **FX** Underkänt inom en viss gräns under E med rätt att komplettera till E,examinator bestämmer gränsen

Betyg **F** Underkänt



60 % på A-delen måste alltså klaras för samtliga betygsgrader, och poängen på B-delen bestämmer betyget. D-graden kan fås genom att klara 80 % på A-delen.

### **Hjälpmedel**

Datablad med konstantvärden delas ut vid tentamen och finns på kursens hemsida.

2 egna A4-sidor får användas med innehåll från kursen. Övriga parametervärden som behövs finns angivet på tentan. Matematiktabeller, Beta eller andra, får användas.

### **Prototyptentamen**

En prototyptentamen kommer att delas ut och läggas ut på hemsidan. Problemen kommer att vara av samma svårighetsgrad som tidigare, målinriktningen kräver att problemen sorteras i en A-del och en B-del, så att tentanderna ska kunna göra egna val beträffande betygsgraden.

A1. Det största refraktorteleskopet i världen finns vid Yerkes Observatory i Wisconsin. Objektivet har en diameter på 1,02 m. Två insekter finns på avståndet  $3,75 \cdot 10^4$  m från teleskopet. Antag att ljusets

våglängd är  $\lambda = 565 \text{ nm}$ . Vad är minsta avståndet mellan insekterna så att de precis kan lösas upp av teleskopet? ( 4p )

A2. Två skärgårdsbåtar möts. Båt 1 står stilla. Båt 2 närmar sig båt 1 med hastigheten  $4 \text{ m/s}$ . På däck på båt 1 stämmer en liten orkester instrumenten efter normal -  $A = 440 \text{ Hz}$ . En gitarrist på båt 2 ska just stämma sin gitarr. Han hör tonen från båt 1, men använder inte den tonen. Hur mycket skiljer tonen han hör från normal -  $A$ ? Det var en mycket varm dag, ljudhastigheten i luft,  $v_{\text{luft}}$ , kan sättas till  $347 \text{ m/s}$  och det blåste  $6 \text{ m/s}$  vid tillfället i samma riktning som båt 2 gick i. ( 4p )

A3. En elektrisk potential kan beskrivas med följande uttryck:

$$V = ax + bxy + c(z^2 - x^2) \text{ V.}$$

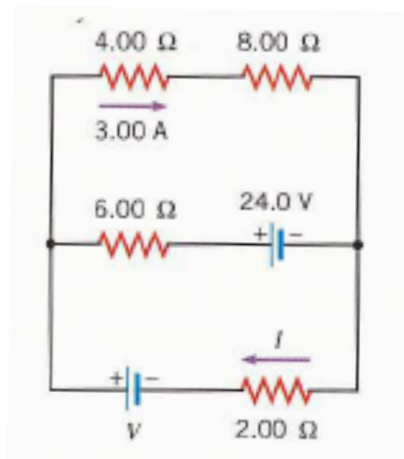
Bestäm den elektriska fälstyrkan  $E$  till storlek och riktning i punkten.  $P = (1, 2, 1) \text{ m}$

Det gäller att  $a = 1000 \text{ V/m}$ ,  $b = 500 \text{ V/m}^2$ ,  $c = 1000 \text{ V/m}^2$ . ( 4p )

A4. Undersökningar på försökspersoner har visat att hörselskador kan uppkomma när en person utsätts för ljud på  $90 \text{ dB}$  (  $90 \text{ dB}$  över gränsen för hörande ) under en tid på  $9 \text{ h}$ . Bestäm den energi som träffar trumhinnan under den tiden. En trumhinna har en radie på ca  $8 \text{ mm}$ .

$$I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2 \text{ ( 4p )}$$

A5. Se kretsen nedan. Bestäm spänningen  $V$  och strömmen  $I$  över batteriet i nedersta grenen och  $I_2$  i mellangrenen. ( 4p )



**Del B**

B1. En räddningsdykare som hjälpte till vid en fartygsolycka låg skadad på botten 50 meter ned i vattnet. Ytan ovanför honom var täckt med ett tunt lager olja från det förlistade fartyget. Han tände sin röda laserpekare och lyste rakt upp så att hans kompisar skulle se var han låg. Han var nervös men hoppades att tjockleken på oljan var optimal så att hans ljus verkligen skulle synas. Hur tjockt lager olja kunde han hoppas på? Redovisa klart vägskillnaden och vad som händer vid reflexionerna i gränssytorna. ( 4p )

Data:  $n_{luft} \approx 1$ ,  $n_{vatten} \approx 1.33$ ,  $n_{olja} \approx 1.46$ ,  $\lambda_{laser} \approx 670$  nm.

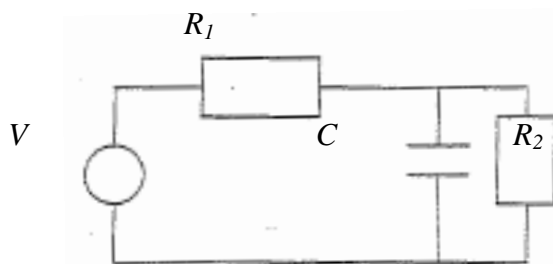
Ledning: Här söks villkor för förstärkning vid ytan. Dvs det är inget antireflexivt skikt.

B2. Lars och Anna solade på stranden och hade lagt ifrån sig sina linjärpolariserade solglasögon. I Lars par absorberades 2 % av intensiteten och i Annas absorberades också 2 %. Solstrålningens intensitet var ca  $790 \text{ W/m}^2$ . Lars höll upp de två paren glasögon efter varandra och tittade genom en lins från vardera paret och roterade dem 30 grader relativt varandra från läget där det verkade vara maximal intensitet. Hur stor intensitet uppfattade han? ( 4p )

Ledning: Vid genomgång av första polaroiden försvinner först hälften av intensiteten ( bara vid första polaroiden ).

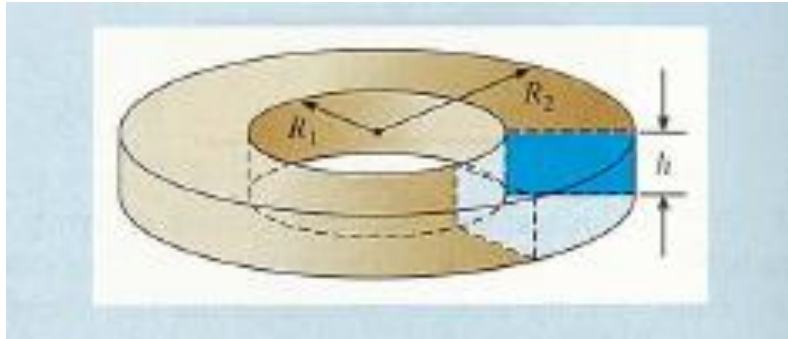
B3. In a time measuring system an AC circuit was used, see figure below.  $V = 10 \text{ V}$ ,  $f = 1000 \text{ Hz}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ . Put the total voltage  $V$  in the circuit as the directional phase ( zero phase ) in a diagram, calculate all currents  $I_{tot}$ ,  $I_C$ ,  $I_2$  and sketch them and  $V$  in a diagram. Voltage and current scales will of course be different when currents and voltage is in same diagram. ( 4p )

Hint: Use the complex method.



B4. En toroidspole med  $N = 500$  varv lindad på vanligt sätt har ett rektangulärt tvärsnitt, tjockleken  $h = 2,5 \text{ cm}$  och bredden är  $(R_2 - R_1)$  och strömmen  $i = 10 \mu\text{A}$  går i spolen. Förhållandet mellan radierna kan skrivas  $\frac{R_2}{R_1} = a = 7$ . Se figuren nedan. Bestäm totala flödet  $\Phi$  som går genom tvärsnittet  $(R_2 - R_1) \times h$ , ytområdet som är markerat i figuren. ( 4p )

Ledning: Obs! B-fältet varierar med radien!



B5. I en dielektrisk sfär med radien  $R = 15$  cm beror laddningstätheten  $\rho$  C/m<sup>3</sup> på följande sätt av radien  $r$ :

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \text{ C/m}^3, \text{ där } \rho_0 = + 7 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^3.$$

a) Bestäm storleken på den elektriska fältstyrkan  $E$  för  $r < R$ . ( 2p )

b) Bestäm storleken på den elektriska fältstyrkan  $E$  för  $r > R$ . ( 1p )

c) Bestäm för vilket  $r$  den elektriska fältstyrkan antar sitt maximum. Bestäm också storleken på den maximala elektriska fältstyrkan  $E_{max}$ . ( 1p )

Ledning: Obs!  $\rho$  varierar med radien!

## SK1111 Elektricitets- och vågrörelselära

### Tentamensprincipen enligt ECTS-systemet, kraven för olika betygsgrader

Tentamen är uppdelad i två delar, del A och del B.

Del A består av 5 st något enklare uppgifter, varje uppgift kan ge maximalt 4p, totalt har A-delen 20p.

Del B består av 5 st uppgifter som kräver större problemlösningsförmåga, varje uppgift kan ge 4p, totalt har B-delen 20p.

Betygsgraderna A, B, C, D, E, FX och F finns, grad A är högst.

### Minimikraven för de olika betygsgraderna

Betyg **A** 60 % på A-delen (12p) + 60 % på B-delen (12p)

Betyg **B** 60 % på A-delen (12p) + 40 % på B-delen (8p)

Betyg **C** 60 % på A-delen (12p) + 20 % på B-delen (4p)

Betyg **D** 80 % på A-delen (16p) **eller** 60 % på A-delen (12p) + 10 % på B-delen (2p)

Betyg **E** 60 % på A-delen (12p)

Betyg **FX** Underkänt inom en viss gräns under E med rätt att komplettera till E, examinator bestämmer gränsen

Betyg **F** Underkänt

60 % på A-delen måste alltså klaras för samtliga betygsgrader, och poängen på B-delen bestämmer betyget. D-graden kan fås genom att klara 80 % på A-delen.

### Hjälpmedel

Datablad med konstantvärden delas ut vid tentamen och finns på kursens hemsida.

2 egna A4-sidor får användas med innehåll från kursen. Övriga parametervärden som behövs finns angivet på tentan. Matematiktabeller, Beta eller andra, får användas.

### Prototypentamen

En prototypentamen kommer att delas ut och läggas ut på hemsidan. Problemen kommer att vara av samma svårighetsgrad som tidigare, målinriktningen kräver att problemen sorteras i en A-del och en B-del, så att tentanderna ska kunna göra egna val beträffande betygsgraden.

### Lösningförslag till Tentamen i SK1111 Elektricitets- och vågrörelselära för K och Bio ti den 13 jan 2009.

$$A1. \text{ Rayleighvillkoret ger } \theta_c = \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{1,22 \cdot 565 \cdot 10^{-9}}{1,02} \quad (1)$$

$$\text{Vinkeln beräknas genom } \theta_c = \frac{x}{L} = \frac{x}{3,75 \cdot 10^4} \quad (2)$$

$$(1) \text{ och } (2) \text{ ger: } x = \frac{1,22 \cdot 565 \cdot 10^{-9} \cdot 3,75 \cdot 10^4}{1,02} = 0,02534 < 0,0254 \text{ m}$$

**Svar:** Avståndet var 2,54 cm ( Obs! Svaret bör avrundas uppåt! ).

A2. Han upplever högre frekvens än 440 Hz. Dopplersvävning med rörlig observatör och stillastående källa ger följande med mediets rörelse motriktad ljudets:

$$\text{Frekvensen ökar enligt } f_{git} = f_0 \left( 1 + \frac{v_{båt2}}{(v_{ljud} - v_{medium})} \right) = 440 \left( 1 + \frac{4}{(347 - 6)} \right) = 445,2 \text{ Hz}$$

**Svar:** Gitarristen upplevde frekvensen  $f_{git} = 445 \text{ Hz}$ .

A3.  $E = -\text{grad } V$ . Derivering ger:

$$E = -\text{grad}V = -[a + by - 2cx; bx; 2cz] = -[1000 + 500 \cdot 2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1; 500 \cdot 1; 2 \cdot 1000 \cdot 1] = -[0, 0,5, 2] \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

Storleken blir  $E = 2,1 \text{ kV/m}$ , Riktningen blir  $-[0, 0,5, 2] \text{ m}$ ,  $-[0, 0,24, 0,97]$  normerat.

**Svar:** Storlek  $E = 2,1 \text{ kV/m}$ , Riktning  $-[0, 0,5, 2] \text{ m}$  eller  $-[0, 0,24, 0,97]$  normerat.

A4. Definitionen av dB ger:  $10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{P/A}{I_0} = 10 \log \frac{P}{\pi \cdot r^2 \cdot I_0}$

$$= 10 \log \frac{P}{3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-12}} = 90 \Rightarrow P = 3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

Energien blir  $U = P \cdot t = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 3600 = 6,48 \text{ mJ}$

**Svar:** Energin blir ca 6,5 mJ.

A5. Kirchhoffs lagar ger:

Övre loopen medsols,  $I_2$  till vänster i mitt-grenen:  $24 - 6 \cdot I_2 - (4 + 8) \cdot 3 = 0$  ( 1 )

Undre loopen medsols,  $I_2$  till vänster i mitt-grenen:  $V + 6 \cdot I_2 - 24 - 2 \cdot I = 0$  ( 2 )

Strömmarna i vänstra noden:  $3 = I_2 + I$  ( 3 )

( 1 ) ger  $I_2 = -2 \text{ A}$  och ( 3 ) ger då att  $I = 5 \text{ A}$ , varefter ( 2 ) ger att  $V = 46 \text{ V}$

**Svar:**  $I_2 = 2 \text{ A}$ ,  $I = 5 \text{ A}$  och  $V = 46 \text{ V}$ ,  $I_2$  är motriktad den ansatta riktningen, dvs egentligen riktad till höger.

B1. Villkor för förstärkning är allmänt: vägskillnad = ett helt antal våglängder =  $m\lambda$ .

Jämför en direkt genomgående stråle 1 och en reflekterad och genomgående stråle 2.

Vägen är:

För stråle 1 :  $L_1 = d_{olja}$

För stråle 2 :  $L_2 = d_{olja} + 0 \cdot \lambda/2$  ( vid första reflexionen olja-luft ) +  $d_{olja} +$

$0 \cdot \lambda/2$  ( vid andra reflexionen olja-vatten ) +  $d_{olja} = 3 d_{olja}$

Vägskillnaden är :  $\Delta L = 3 d_{olja} - d_{olja} = 2 d_{olja}$

Villkoret blir:  $2 d_{olja} = m\lambda_{olja}$ , betrakta villkoret för första ordningens interferens,  $m = 1$

$$2 d_{olja} = \lambda_{olja}, \text{ där } \lambda_{olja} = \frac{\lambda}{n_{olja}}$$

$$d_{olja} = \frac{\lambda}{2n_{olja}} = \frac{670 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 1,46} \approx 230 \text{ nm}$$

**Svar:**  $d_{olja} = 230 \text{ nm}$  skulle ge förstärkning på ytan.

B2. 3. Använd Malus's lag:  $I = I_0 \cdot \cos^2 \theta$

Intensiteten blir  $I = \frac{790}{2} \cdot 0,98 \cdot 0,98 \cdot \cos^2 30 \approx 284,5 \text{ W/m}^2$

**Svar:** Lars uppfattar intensiteten  $284 \text{ W/m}^2$ .

B3. Totala impedansen kan skrivas

Frekvensen är  $f = 1000 \text{ Hz}$  och  $\omega = 6280 \text{ rad/s}$

$$Z_{tot} = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} - j \frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2}$$

$= 202,47 - j15,53$ , dvs  $|Z_{tot}| = 203 \Omega$  och  $Z_{tot}$  kan skrivas  $Z_{tot} = |Z_{tot}| \cdot e^{j\varphi} = 203 \cdot e^{-j4,4^\circ} \Omega$ , där

$$\varphi = -\arctan \frac{15,53}{202,47} = -4,4^\circ.$$

Ohms lag ger totalströmmen till  $I_{tot} = \frac{V}{Z_{tot}} = \frac{V}{|Z_{tot}| \cdot e^{j\varphi}} = \frac{10}{203 \cdot e^{-j4,4^\circ}} = 0,049 \cdot e^{j4,4^\circ} \text{ A}$ .

Strömmen genom  $C$  blir

$$I_C = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot I_{tot} = \frac{jR_2\omega C}{jR_2\omega C + 1} \cdot I_{tot} = \frac{(R_2\omega C)^2}{1 + (R_2\omega C)^2} \cdot I_{tot} + j \frac{R_2\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2} \cdot I_{tot} = (0,048 + j0,008) \cdot e^{j4,4^\circ}$$

$$= 0,048 \cdot e^{j9,5^\circ} \cdot e^{j4,4^\circ} = 0,048 \cdot e^{j13,9^\circ}$$

.

$$I_2 = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot I_{tot} = \frac{1}{1 + j\omega CR_2} \cdot I_{tot} = \frac{1}{1 + (\omega CR_2)^2} \cdot I_{tot} - j \frac{\omega CR_2}{1 + (\omega CR_2)^2} \cdot I_{tot}$$

Strömmen genom  $R_2$  blir  $(0,14 \cdot 0,049 - j0,16 \cdot 0,049) \cdot e^{j4,4^\circ} = (0,007 - j0,008) \cdot e^{j4,4^\circ} = 0,010 \cdot e^{-j48,8^\circ} \cdot e^{j4,4^\circ} = 0,010 \cdot e^{-j44,4^\circ}$ .

Diagram:

**Svar:**  $V = 10 \text{ V}$  längs reella axeln.  $I_{tot} = 0,049 \cdot e^{j4,4^\circ} \text{ A}$ ,  $I_C = 0,048 \cdot e^{j13,9^\circ}$  och  $I_2 = 0,010 \cdot e^{-j44,4^\circ}$ .

Summan av  $I_C$  och  $I_2$  ska bli lika med  $I_{tot}$ . I diagrammet ska summan av de komplexa visarna för  $I_C$  och  $I_2$  ska bli lika med visaren för  $I_{tot}$ . Ibland gör avrundningsfel att det inte riktigt stämmer.

B4. Integration öve  $r$ , tag en infinitesimal tjocklek  $dr$  och teckna  $dA = h \cdot dr$ :

$$d\Phi = B \cdot dA = B \cdot h \cdot dr, \text{ där } B \text{ för en toroid med } N \text{ varv är: } B = N \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Totala flödet i tvärsnittsytan blir:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{R_1}^{R_2} d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B \cdot h \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} N \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot h \cdot dr = N \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot h \ln \frac{R_2}{R_1} = 500 \frac{4\pi \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2\pi} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \ln 7 = \\ &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} \end{aligned}$$

**Svar:** Flödet blev  $5 \cdot 10^{-4}$  Wb

B5.a) Gauss sats och integration över  $r$  med  $dV = 4\pi r^2 dr$  ger:

$$\begin{aligned} \int EdA &= E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R}\right) 4\pi \zeta^2 d\zeta = 4\pi \rho_0 \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \left(\zeta^2 - \frac{\zeta^3}{R}\right) d\zeta \\ &= \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) \quad (1) \text{ för } E < R \end{aligned}$$

$$\text{b) Sätt in } r = R, E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right) \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \cdot r^2} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4}\right) = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{12 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\text{c) } \frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{2r}{4R}\right) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3}R, \text{ vilket efter insättning i (1) ger}$$

$$\Rightarrow E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = 1,32 \text{ MV/m}$$

$$\text{Svar: a) } E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) \text{ för } E < R, \text{ b) } E = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{12 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \text{ c) } E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0} = 1.32 \text{ MV/m}$$